第八章　欧氏空间

§8.3 对称变换，对称矩阵

首先讨论欧氏空间的线性变换在不同的标准正交基下的矩阵的联系.

设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 和 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的标准正交基,从基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 到 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 的过渡矩阵为正交矩阵 Q, 即

$$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)Q.$$

设 φ 是 V 的线性变换，φ 在两个标准正交基下的矩阵分别是 A,B, 即

$$\varphi(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)A,$$

$$\varphi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)B,$$

则有 $B=Q^{-1}AQ=Q^TAQ$.

定义 8.3.1 设 A,B 是 $\mathbb{R}$ 上 n 阶方阵，如果存在正交矩阵 Q, 使得

$$B=Q^{-1}AQ=Q^TAQ,$$

则称 A**正交相似** 于 B.

从上面的分析直接得到如下定理.

定理 8.3.1 $\mathbb{R}$ 上两个 n 阶方阵 A,B 正交相似的充分必要条件是它们为欧氏空间 V 上同一个线性变换在不同的标准正交基下的矩阵.

$\mathbb{R}^{n\times n}$ 上的正交相似关系满足：

(1) 反身性，即 A 正交相似于 A;

(2) 对称性，即若 A 正交相似于 B, 则 B 正交相似于 A;

(3) 传递性，即若 A 正交相似于 B, B 正交相似于 C, 则 A 正交相似于 C.

对于欧氏空间的线性变换，重要的任务是寻找正交相似下的标准形．下面讨论一类特殊的但重要的对称变换.

定义 8.3.2 设 φ 是欧氏空间 V 上的线性变换，如果满足对于任意的 $\alpha,\beta\in V$, 都有

$$(\varphi(\alpha),\beta)=(\alpha,\varphi(\beta)),$$

则称 φ 是 **对称变换**.

定理 8.3.2 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 的线性变换，则下列条件等价：

(1) φ 是对称变换;

(2) 存在 V 的一个标准正交基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$, 有使得 $(\varphi(\xi_i),\xi_j)=(\xi_i,\varphi(\xi_j))(i,j=1,2,\cdots,n)$;

(3) φ 在 V 的一个标准正交基下的矩阵是对称阵.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 显然.

(2) $\Rightarrow$ (3) 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 为 V 的一个标准正交基，则

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)A,$$

记 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, 则

$$(\varphi(\xi_i), \xi_j) = (a_{1i}\xi_1 + a_{2i}\xi_2 + \cdots + a_{ni}\xi_n, \xi_j) = a_{ji},$$

$$(\xi_i, \varphi(\xi_j)) = (\xi_i, a_{1j}\xi_1 + a_{2j}\xi_2 + \cdots + a_{nj}\xi_n, \xi_j) = a_{ij},$$

所以 $a_{ij} = a_{ji}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$, 即 $A = A^T$.

(3) $\Rightarrow$ (2) 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 为 V 的一个标准正交基,

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)A,$$

其中 $A^T = A$. 则

$$(\varphi(\xi_i), \xi_j) = (a_{1i}\xi_1 + a_{2i}\xi_2 + \cdots + a_{ni}\xi_n, \xi_j) = a_{ji},$$

$$(\xi_i, \varphi(\xi_j)) = (\xi_i, a_{1j}\xi_1 + a_{2j}\xi_2 + \cdots + a_{nj}\xi_n, \xi_j) = a_{ij},$$

所以 $(\varphi(\xi_i), \xi_j) = (\xi_i, \varphi(\xi_j))(i, j = 1, 2, \cdots, n)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) 对于 V 的标准正交基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$, 任取 $\alpha, \beta \in V$, $\alpha = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \cdots + a_n\xi_n$, $\beta = b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + \cdots + b_n\xi_n$, 所以

$$\begin{array}{rl}(\varphi(\alpha), \beta) & = (a_1\varphi(\xi_1) + a_2\varphi(\xi_2) + \cdots + a_n\varphi(\xi_n), b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + \cdots + b_n\xi_n) \\ & = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_k b_l (\varphi(\xi_k), \xi_l) \\ & = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_k b_l (\xi_k, \varphi(\xi_l)) \\ & = (a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \cdots + a_n\xi_n, b_1\varphi(\xi_1) + b_2\varphi(\xi_2) + \cdots + b_n\varphi(\xi_n)) \\ & = (\alpha, \varphi(\beta))\end{array}.$$

□

从证明的过程中我们看到，在取定欧氏空间的一个标准正交基的前提下，对称变换和实对称矩阵是一一对应的. 下面讨论对称变换或对称矩阵在正交相似下的标准形.

定理 8.3.3 设 A 是实对称阵，则 A 的特征值全为实数且属于不同特征值的特征向量在 $\mathbb{R}^n$ 中相互正交.

证明 设

$$AX = \lambda X,$$

其中 $\lambda \in \mathbb{C}$, $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \neq 0 \in \mathbb{C}^n$. 则从 $\overline{AX} = \overline{\lambda X}$ 得到 $A\overline{X} = \overline{\lambda X}$, 所以

$$X^T A\overline{X} = \overline{\lambda} X^T \overline{X}.$$

另一方面，从 $X^T A = \lambda X^T$ 得到

$$X^T A\overline{X} = \lambda X^T \overline{X}.$$

故有

$$\overline{\lambda} X^T \overline{X} = \lambda X^T \overline{X}.$$

因为 $X \neq 0$, 所以 $X^T\overline{X} > 0$. 这样 $\overline{\lambda} = \lambda$, 即 $\lambda \in \mathbb{R}$.

设 λ, μ 是 A 的两个不同特征值, X, Y 分别是属于 λ, μ 的特征向量, 即 $AX = \lambda X$, $AY = \mu Y$. 这样

$$\lambda X^T Y = X^T AY = \mu X^T Y.$$

而 $\lambda \neq \mu$, 于是 $X^T Y = 0$, 即 $(X, Y) = 0$. □

定理 8.3.4 设 A 是 $\mathbb{R}$ 上 n 阶对称矩阵. 则存在正交阵 T, 使得 $T^{-1}AT = T^T AT$ 为对角阵, 对角线元素为 A 的特征值.

证明 对 A 的阶数 n 作数学归纳法. 当 $n = 1$ 时, 结论显然成立. 假设结论对 $n-1$ 阶的对称矩阵成立. 考虑 n 阶对称阵 A. 由定理 8.3.3, 知 A 必有实特征值 λ_1 和相应的特征向量 X_1, 将 X_1 单位化还记成 X_1, 并将 X_1 扩为 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基 $X_1, X_2, \cdots, X_n$. 则

$$A(X_1, X_2, \cdots, X_n) = (X_1, X_2, \cdots, X_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha^T \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

令 $Q_1 = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$, 则 Q_1 为正交阵, 且

$$Q_1^T AQ_1 = Q_1^{-1}AQ_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha^T \\ 0 & A_1 \end{pmatrix},$$

又因为 $A^T = A$, 所以

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha^T \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \alpha & A_1^T \end{pmatrix}.$$

故 $\alpha = 0$, $A_1 = A_1^T$. 根据归纳假设, 存在正交阵 Q_2, 使得

$$Q_2^{-1}A_1Q_2 = \mathrm{diag}(\lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

令 $Q = Q_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}$, 则 Q 为正交阵, 且有

$$Q^{-1}AQ = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

□

定理 8.3.3 和定理 3.3.4 用线性变换的语言来说, 就是下面的结论.

(1) 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 的对称变换, 则 φ 的特征值全为实数, 且属于不同特征值的特征向量相互正交.

(2) 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 上的对称变换, 则存在 V 的一个标准正交基, 使得 φ 在这个基下的矩阵是对角阵, 且这组基恰为 φ 的 n 个线性无关的特征向量.

例 1 求正交矩阵 Q, 使 $Q^T AQ$ 为对角阵, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

解

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda - 5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10),$$

因此 A 的特征值是 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=10$.

对 $\lambda=10$, 求解齐次线性方程组 $(10E-A)X=0$, 得到基础解系

$$\xi_1=(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})^T.$$

对 $\lambda=1$, 求解齐次线性方程组 $(E-A)X=0$, 得到基础解系 $(0,1,1)^T$ 与 $(2,-1,0)^T$, 正交化，再单位化，得

$$\xi_2=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T,$$

$$\xi_3=(\frac{4}{\sqrt{18}},-\frac{1}{\sqrt{18}},\frac{1}{\sqrt{18}})^T.$$

因此

$$Q=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix},$$

则

$$Q^TAQ=\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

从例子可以看出化实对称阵 A 为对角化的方法：

(1) 计算 A 的特征多项式 $\det(\lambda E-A)$, 求出所有根，必在 $\mathbb{R}$ 中；

(2) 对每个不同的特征值 λ_i, 解线性方程组 $(\lambda E-A)X=0$, 得到特征子空间的一个基, 施行 Schmidt 正交化，单位化，得到特征子空间的一个标准正交基；

(3) 将不同特征子空间的标准正交基凑成 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$, 令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$, 则 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵，对角元素分别是对应于 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$ 的全部特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

我们用两个例子来结束本节.

例 2 设 A 是 3 阶实对称矩阵， A 的特征值为 $2,1,1$. 已知属于特征值 2 的特征向量 $X_1=(1,1,0)^T$, 又向量 $X_2=(1,-1,0)^T$ 是属于特征值 1 的特征向量，求矩阵 A.

解 由定理 8.3.3 知 A 有一个属于特征值 1 的特征向量与 X_1,X_2 都正交. 设之为 $X_3=(x_1,x_2,x_3)^T$, 得

$$\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_1-x_2=0 \end{cases}$$

解得 $X_3=(0,0,1)^T$. 将 X_1,X_2,X_3 单位化，得

$$Y_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T,Y_2=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T,Y_3=(0,0,1)^T.$$

记

$$Q=(Y_1,Y_2,Y_3)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则
$$A=Q\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}Q^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

例 3 设三阶实对称阵 A 的各行元素之和为 3, 向量 $\alpha_1=(-1,2,-1)^T$, $\alpha_2=(0,-1,1)^T$ 是线性方程组 $AX=0$ 的两个解.

(1) 求 A 的特征值和特征向量;

(2) 求正交矩阵 Q 和对角阵 B, 使得 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ=B$;

(3) 求 A 和 $(A-\frac{3}{2}E)^6$.

解 (1) 因为向量 $\alpha_1=(-1,2,-1)^T$, $\alpha_2=(0,-1,1)^T$ 是线性方程组 $AX=0$ 的两个线性无关的解. 所以 A 的属于特征值 0 的特征向量为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$, 其中 k_1,k_2 为不全为零的常数.

因为 A 的各行元素之和为 3, 所以
$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$
所以 A 的属于特征值 3 的特征向量为 $k_3\alpha_3=k_3(1,1,1)^T$, 其中 k_3 为非零常数;

(2) 对 α_1,α_2 做正交化，得到
$$\beta_1=\alpha_1=(-1,2,-1)^T,\quad \beta_2=\frac{1}{2}(-1,0,1)^T.$$
单位化得到
$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)^T,\quad \gamma_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T,\quad \gamma_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T.$$
令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$, 则
$$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

(3) 因为
$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(0,0,3\alpha_3).$$
所以
$$A=(0,0,3\alpha_3)(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

记 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, 则
$$A=P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}P^{-1}.$$
所以
$$(A-\frac{3}{2}E)^6=P\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}&0&0\\0&-\frac{3}{2}&0\\0&0&\frac{3}{2}\end{pmatrix}^6P^{-1}=(\frac{3}{2})^6E.$$

习题

1. 求正交矩阵 Q, 使 Q^TAQ 为对角阵, 其中 A 为

(1)

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{pmatrix};$$

(2)

$$A=\begin{pmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{pmatrix}.$$

2. 已知 $\lambda_1=6$, $\lambda_2=\lambda_3=3$ 是实对称阵的三个特征值. 且对应于 $\lambda_2=\lambda_3$ 的特征向量为 $\alpha_2=(-1,0,1)^T$, $\alpha_3=(1,-2,1)^T$, 求 A 的对应于 λ_1 的特征向量及 A.

3. 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 上的对称变换, $\varphi^2=\mathrm{id}_V$, 且 $\varphi\neq\mathrm{id}_V$,$\varphi\neq(-1)\mathrm{id}_V$, 则存在 V 的一个标准正交基, 使得 φ 在此基下的矩阵为 $\mathrm{diag}(1,\cdots,1,-1,\cdots,-1)$.

4. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 个有序实数, $\lambda_{\sigma(1)},\lambda_{\sigma(2)},\cdots,\lambda_{\sigma(n)}$ 是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的一个排列, 则 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 正交相似于 $\mathrm{diag}(\lambda_{\sigma(1)},\lambda_{\sigma(2)},\cdots,\lambda_{\sigma(n)})$.

5. 设 A,B 是实对称阵. 求证下列条件是等价的.

(1) A 正交相似于 B;

(2) A 和 B 有相同的特征多项式;

(3) A 和 B 有相同的特征值.

6. 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 上的对称变换, U 是 $\varphi-$ 不变子空间, 则 $U^\perp$ 也是 $\varphi-$ 不变子空间.