第八章　欧氏空间

§8.2 标准正交基

在三维空间的解析几何中，取三个两两正交的向量作为直角坐标系，作为讨论问题的基础. 受此启发，本节定义标准正交基的概念.

定义 8.2.1 设欧氏空间 V 的一组向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 满足

$$(\alpha_i, \alpha_j) = 0, \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, \cdots, m),$$

则称为一 **正交向量组**. 若还满足

$$|\alpha_i| = 1 (i = 1, 2, \cdots, m),$$

则称为 **标准正交向量组**.

定理 8.2.1 欧式空间 V 中的正交向量组必线性无关.

证明 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是 V 中一个正交向量组，若

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_m\alpha_m = 0.$$

则对于任意的 $i (1 \leq i \leq m)$, 有

$$(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_m\alpha_m, \alpha_i) = 0.$$

而 $(\alpha_i, \alpha_j) = 0$, 故 $a_i(\alpha_i, \alpha_i) = 0$. 因为 $\alpha_i \neq 0$, 故 $a_i = 0$. □

定义 8.2.2 欧氏空间 V 中一个两两正交的向量组构成的基称为正交基. 若正交基的每个向量都是单位向量，则称为 **标准正交基**.

例 1 在欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中， $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是一个标准正交基. 向量组 $\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \cdots, n\varepsilon_n$ 是一个正交基，但不是一个标准正交基. 向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, 0, \cdots, 0)^T$,$\alpha_3 = (1, 1, 1, \cdots, 0)^T$,$\cdots$, $\alpha_n = (1, 1, 1, \cdots, 1)^T$ 是一个基，但不是正交基.

在标准正交基下，向量的坐标可以用内积表示. 即

$$\alpha = (\alpha, \xi_1)\xi_1 + (\alpha, \xi_2)\xi_2 + \cdots + (\alpha, \xi_n)\xi_n,$$

其中 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的一个标准正交基. 事实上，设 $\alpha = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \cdots + a_n\xi_n$. 则 $(\xi_i, \alpha) = (\xi_i, a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \cdots + a_n\xi_n) = a_i (i = 1, 2, \cdots, n)$.

在标准正交基下，向量的内积有特别简单的表示式. 设 $\alpha = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \cdots + a_n\xi_n$, $\beta = b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + \cdots + b_n\xi_n$, 则

$$(\alpha, \beta) = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n,$$

也可以表示为 (Parseval 等式)

$$(\alpha,\beta)=(\alpha,\xi_1)(\beta,\xi_1)+(\alpha,\xi_2)(\beta,\xi_2)+\cdots+(\alpha,\xi_n)(\beta,\xi_n).$$

事实上, $(\alpha,\beta)=(a_1\xi_1+a_2\xi_2+\cdots+a_n\xi_n,b_1\xi_1+b_2\xi_2+\cdots+b_n\xi_n)=\sum_{i,j=1}^n a_ib_j(\xi_i,\xi_j)=\sum_{i=1}^n a_ib_i$.

下面根据内积的特点来讨论构造标准正交基的方法.

定理 8.2.2(Schmidt **正交化**) 对于欧氏空间 V 的一个线性无关向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$, 必存在标准正交向量组 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$, 使得对于任意的 $r(1\le r\le s)$, 总有

$$\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_r\rangle=\langle\gamma_1,\cdots,\gamma_r\rangle.$$

证明 对于线性无关向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$, 进行 Schmidt 正交化

$$\beta_1=\alpha_1,\quad \beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1,\quad \cdots$$

$$\beta_r=\alpha_r-\frac{(\alpha_r,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_r,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_r,\beta_{r-1})}{(\beta_{r-1},\beta_{r-1})}\beta_{r-1},\quad (r=3,4,\cdots,s).$$

显然有

$$\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\rangle=\langle\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r\rangle,\quad (r=1,2,\cdots,s).$$

下面证明 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 两两正交. 对 r 做数学归纳法.

首先, $(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_1,\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1)=(\alpha_1,\alpha_2)-\frac{(\alpha_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}(\alpha_1,\alpha_1)=0.$

假设 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{r-1}$ 两两正交, 则

$$\beta_r=\alpha_r-\sum_{i=1}^{r-1}\frac{(\alpha_r,\beta_i)}{(\beta_i,\beta_i)}\beta_i$$

与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{r-1}$ 两两正交. 事实上, 对任意 $j(1\le j\le r-1)$,

$$\begin{aligned}(\beta_j,\beta_r)&=(\beta_j,\alpha_r-\textstyle\sum_{i=1}^{r-1}\frac{(\alpha_r,\beta_i)}{(\beta_i,\beta_i)}\beta_i)\\&=(\beta_j,\alpha_r)-(\beta_j,\textstyle\sum_{i=1}^{r-1}\frac{(\alpha_r,\beta_i)}{(\beta_i,\beta_i)}\beta_i)\\&=(\beta_j,\alpha_r)-\textstyle\sum_{i=1}^{r-1}\frac{(\alpha_r,\beta_i)}{(\beta_i,\beta_i)}(\beta_j,\beta_i)\\&=(\beta_j,\alpha_r)-\frac{(\alpha_r,\beta_j)}{(\beta_j,\beta_j)}(\beta_j,\beta_j)\\&=(\beta_j,\alpha_r)-(\alpha_r,\beta_j)\\&=0\end{aligned}.$$

根据归纳法, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 两两正交. 再进行单位化,

$$\gamma_i=\frac{\beta_i}{|\beta_i|}(i=1,2,\cdots,s).$$

则 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$ 是标准正交向量组且对于任意的 $r,(r=1,2,\cdots,s)$, 有

$$\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_r\rangle=\langle\beta_1,\cdots,\beta_r\rangle=\langle\gamma_1,\cdots,\gamma_r\rangle.$$

□

推论 8.2.1 有限维欧氏空间必有标准正交基.

推论 8.2.2 有限维欧氏空间 V 的任意标准正交向量组都可扩为 V 的标准正交基.

证明 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 是 $n(r<n)$ 维欧氏空间 V 的标准正交向量组，扩充成为 V 的一个基 $\xi_1,\xi_2,\cdots$，ξ_r，α_{r+1}，$\cdots$，α_n. 对这个基做正交化和单位化. 这个过程中 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 不变，得到标准正交基 $\xi_1,\cdots,\xi_r,\xi_{r+1},\cdots,\xi_n$. □

例 2 求与向量组 $\alpha_1=(1,1,1,1)^T,\alpha_2=(1,-2,-3,-4)^T,\alpha_3=(1,2,2,3)^T$ 等价的一个标准正交向量组.

解 先利用 Schmidt 正交化方法求出与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等价的正交向量组.

$$\beta_1=\alpha_1=(1,1,1,1)^T,$$

$$\begin{aligned}\beta_2&=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(1,-2,-3,-4)^T-\frac{1-2-3-4}{1+1+1+1}(1,1,1,1)^T\\&=(1,-2,-3,-4)^T+2(1,1,1,1)^T=(3,0,-1,-2)^T,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_3&=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2\\&=(1,2,2,3)^T-\frac{1+2+2+3}{1+1+1+1}(1,1,1,1)^T-\frac{3-2-6}{9+1+4}(3,0,-1,-2)^T\\&=(1,2,2,3)^T-2(1,1,1,1)^T+\frac{5}{14}(3,0,-1,-2)^T=(\frac{1}{14},0,-\frac{5}{14},\frac{4}{14})^T.\end{aligned}$$

再将 β_1,β_2,β_3 单位化，得到

$$\gamma_1=\frac{1}{|\beta_1|}\beta_1=\frac{1}{2}(1,1,1,1)^T=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}),$$

$$\gamma_2=\frac{1}{|\beta_2|}\beta_2=\frac{1}{\sqrt{14}}(3,0,-1,-2)^T=(\frac{3}{\sqrt{14}},0,-\frac{1}{\sqrt{14}},-\frac{2}{\sqrt{14}}),$$

$$\gamma_3=\frac{1}{|\beta_3|}\beta_3=\frac{14}{\sqrt{42}}(\frac{1}{14},0,-\frac{5}{14},\frac{4}{14})^T=(\frac{1}{\sqrt{42}},0,-\frac{5}{\sqrt{42}},\frac{4}{\sqrt{42}}).$$

$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 即是所求向量组.

现在考虑 n 维欧氏空间 V 的两个标准正交基的联系. 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 和 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的两个标准正交基， Q 是从标准正交基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 到标准正交基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的过渡矩阵，即

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)Q.$$

记 $Q=(q_{ij})_{n\times n}$, 则

$$\begin{aligned}\delta_{ij}&=(\eta_i,\eta_j)\\&=(q_{1i}\xi_1+q_{2i}\xi_2+\cdots+q_{ni}\xi_n,q_{1j}\xi_1+q_{2j}\xi_2+\cdots+q_{nj}\xi_n)\\&=\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n q_{ki}q_{lj}(\xi_k,\xi_l)\\&=\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n q_{ki}q_{lj}\delta_{kl}\\&=\sum_{k=1}^n q_{ki}q_{kj}.\end{aligned}$$

所以 $Q^TQ=E$.

定义 8.2.3 一个 n 阶实方阵 Q 称为 **正交阵**, 如果 $Q^TQ=E$.

定理 8.2.3 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 和 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的两个向量组，满足

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)Q,$$

其中 Q 是 n 阶实方阵. 则

(1) 若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 和 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是 V 的标准正交基，则 Q 是正交矩阵，且是从标准正交基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 到标准正交基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的过渡矩阵;

(2) 若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 V 的一个的标准正交基， Q 是正交矩阵, 则 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 也是 V 的一个标准正交基.

证明 (1) 由上面的讨论即得.

(2) 设 Q 是正交矩阵，即 $Q^TQ=E$. 又因为 $(\xi_k,\xi_l)=\delta_{kl}(k,l=1,2,\cdots,n)$, 所以

$$\begin{aligned}
&(\eta_i,\eta_j)\\
&=(q_{1i}\xi_1+q_{2i}\xi_2+\cdots+q_{ni}\xi_n, q_{1j}\xi_1+q_{2j}\xi_2+\cdots+q_{nj}\xi_n)\\
&=\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n q_{ki}q_{lj}(\xi_k,\xi_l)\\
&=\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n q_{ki}q_{lj}\delta_{kl}\\
&=\sum_{k=1}^n q_{ki}q_{kj}=\delta_{ij},
\end{aligned}$$

$i,j=1,2,\cdots,n$. 所以 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是一个标准正交基. □

定理 8.2.4 (1) 正交阵是可逆阵且其逆矩阵也为正交阵;

(2) 两个正交阵的乘积还是正交阵;

(3) 一个 n 阶实方阵 Q 是正交阵的充分必要条件是 $Q^T=Q^{-1}$.

记 n 阶正交阵 $Q=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$, 因为 $Q^TQ=E$, 所以 $X_i^TX_j=\delta_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$. 故在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中， $(X_i,X_j)=\delta_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$. 这样 Q 的列向量组是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基; 反之，若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基，则 $(X_i,X_j)=\delta_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$, 即 $X_i^TX_j=\delta_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$. 所以 $Q^TQ=E$, Q 是正交阵. 同理， Q 是正交阵的充分必要条件是 Q 的行向量组是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基.

欧氏空间中向量组的正交可以推广.

设 U 是欧氏空间 V 的欧氏子空间，如果向量 β 与 U 中的所有向量正交，则称向量 β 与子空间 U 正交，记为 $(\beta,U)=0$. V 中所有与 U 正交的向量构成的集合记为 $U^\perp$, 即

$$U^\perp=\{\beta\in V\mid(\beta,U)=0\}.$$

因为零向量与任意向量正交，所以 $0\in U^\perp$, 故 $U^\perp\neq\emptyset$. 设 $\beta_1,\beta_2\in U^\perp$, $c\in\mathbb{R}$. 对于任意的 $\alpha\in U$, 有 $(\beta_1,\alpha)=0$, $(\beta_2,\alpha)=0$. 所以 $(\beta_1+\beta_2,\alpha)=(\beta_1,\alpha)+(\beta_2,\alpha)=0$. $(c\beta_1,\alpha)=c(\beta_1,\alpha)=0$. 故 $\beta_1+\beta_2\in U^\perp$, $c\beta_1\in U^\perp$. 这样， $U^\perp$ 是 V 的子空间. 子空间 $U^\perp$ 称为 U 的 **正交补空间**.

定理 8.2.5 设 U 是欧氏空间 V 的有限维子空间，则

$$V=U\oplus U^\perp.$$

证明 若 $\alpha\in U\cap U^\perp$, 则 $(\alpha,\alpha)=0$, 所以 $\alpha=0$, 因此 $U\cap U^\perp=0$.

下面证明 $V=U+U^{\perp}$. 对任意 $\alpha\in V$, 由推论 8.2.1 知, 必存在 U 的一个标准正交基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$. 令

$$\beta=(\alpha,\xi_1)\xi_1+(\alpha,\xi_2)\xi_2+\cdots+(\alpha,\xi_m)\xi_m,$$

则 $\beta\in U$. 又令 $\gamma=\alpha-\beta$, 则对任意 $\xi_i(1\le i\le m)$, 有 $(\gamma,\xi_i)=(\alpha,\xi_i)-(\beta,\xi_i)=0$. 所以 $\gamma\in U^{\perp}$, 而 $\alpha=\beta+\gamma$. 从而 $V=U\oplus U^{\perp}$ 成立. □

利用标准正交基，容易讨论欧氏空间的同构. 欧氏空间的同构映射除了保持线性运算外，自然要保持内积.

定义 8.2.4 设 V,U 是两个欧氏空间， $\varphi:V\to U$ 是线性映射，如果 φ 是线性空间同构映射且满足：对于任意的 $\alpha,\beta\in V$, 有

$$(\varphi(\alpha),\varphi(\beta))=(\alpha,\beta),$$

则称 φ 是欧氏空间的 **同构映射**, 也称 V,U 是同构的欧氏空间. 并记为 $V\cong U$.

欧氏空间的同构关系满足

(1) 反身性，即 $V\cong V$;

(2) 对称性，即若 $V\cong W$, 则 $W\cong V$;

(3) 传递性，即若 $V\cong W$, $W\cong U$, 则 $V\cong U$.

定理 8.2.6 任意 n 维欧氏空间都同构于欧氏空间 $\mathbb{R}^n$.

证明 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 V 的一个标准正交基， $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基，令 φ 为如下定义的线性映射 $V\to\mathbb{R}^n$: $\varphi(\xi_i)=\varepsilon_i(i=1,2,\cdots,n)$. 则显然 φ 是线性空间的同构. 并且对任意 $\alpha,\beta\in V$, $\alpha=a_1\xi_1+a_2\xi_2+\cdots+a_n\xi_n$, $\beta=b_1\xi_1+b_2\xi_2+\cdots+b_n\xi_n$, 有

$$\begin{aligned}(\varphi(\alpha),\varphi(\beta))\quad&=(a_1\varphi(\xi_1)+a_2\varphi(\xi_2)+\cdots+a_n\varphi(\xi_n),b_1\varphi(\xi_1)+b_2\varphi(\xi_2)+\cdots+b_n\varphi(\xi_n))\\&=(a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n,b_1\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2+\cdots+b_n\varepsilon_n)\\&=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\\&=(\alpha,\beta).\end{aligned}$$

因此 φ 是同构. □

由定理 8.2.6, 自然有

定理 8.2.7 两个有限维欧氏空间同构的充分必要条件是它们的维数相等.

最后用几个例子结束本节.

例 3 设 A 是实数域上 $m\times n$ 矩阵，U 是 A 的行向量的转置生成的子空间，V 是线性方程组 $AX=0$ 的解空间，则 $V=U^{\perp}$, 且 $\mathbb{R}^n=U\oplus V$.

证明 设 A 的行向量为 $\alpha_1^T,\alpha_2^T,\cdots,\alpha_m^T$, 即 $\alpha_i\in\mathbb{R}^n,(1\le i\le m)$, 且

$$U=\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\rangle.$$

对于 $AX=0$ 的任意解 β, 因为 $A\beta=0$, 即 $(\alpha_i,\beta)=0(i=1,2,\cdots,m)$. 所以 $V\subseteq U^{\perp}$. 反之，设 $\beta\in U^{\perp}$, 则 $(\beta,\alpha_i)=0(i=1,2,\cdots,m)$. 故 $A\beta=0$. 所以 $U^{\perp}\subseteq V$. 这样 $V=U^{\perp}$.

由定理 8.2.5 知 $\mathbb{R}^n=U\oplus V$.

例 4 设 B 是秩为 2 的 5×4 矩阵， $\alpha_1=(1,1,2,3)^T,\alpha_2=(-1,1,4,-1)^T,\alpha_3=(5,-1,-8,9)^T$ 是齐次线性方程组 $BX=0$ 的解向量. 求 $BX=0$ 解空间的一个标准正交基.

解 $r(B)=2$, 所以解空间的维数是 2. 经验证， α_1,α_2 线性无关，可作为解空间的一个基. 运用正交化方法，令

$$\beta_1=\alpha_1=(1,1,2,3)^T,$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(-1,1,4,-1)^T-\frac{1}{3}(1,1,2,3)^T=(-\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{10}{3},-2)^T.$$

再经过单位化，得到

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{15}}(1,1,2,3)^T,\quad \gamma_2=\frac{1}{\sqrt{39}}(-2,1,5,-3)^T.$$

则 γ_1,γ_2 是 $BX=0$ 解空间的一个标准正交基.

习题

1. 已知 $\alpha_1=(0,2,1,0)$, $\alpha_2=(1,-1,0,0)$, $\alpha_3=(1,2,0,-1)$, $\alpha_4=(1,0,0,1)$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 的一个基. 对这个基做 Schimidt 正交化，求 $\mathbb{R}^4$ 的一个标准正交基.

2. 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_3+x_4=0 \\ x_2-x_4=0 \end{cases}$$

的解空间的标准正交基，并求与解空间正交的所有向量.

3. 设 V_1,V_2 是 n 维欧氏空间 V 的子空间.
(1) $(V_1^{\perp})^{\perp}=V_1$;
(2) $V_1\subseteq V_2$, 则 $V_2^{\perp}\subseteq V_1^{\perp}$;
(3) $(V_1+V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$;
(4) $(V_1\cap V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}+V_2^{\perp}$.

4. (1) 实对角阵是正交阵，则其对角元为 ±1;
(2) 上 (下) 三角阵是正交阵，则其为对角阵且对角元为 ±1;
(3) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交阵;
(4) 设 Q 是二阶正交阵，则 Q 只能是 (3) 中出现的两种形式.

5. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是欧氏空间 V 中的非零正交向量组，α 是 V 中的任一向量，证明下面的 Bessel 不等式

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{|(\alpha,\alpha_k)|^2}{|\alpha_k|^2}\le|\alpha|^2;$$

且等号成立的充分必要条件是

$$\alpha\in\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\rangle.$$

6. 写出 §8.1 的例 1 和例 2 中 $\mathbb{R}^n$ 作为不同两种内积的不同的欧氏空间之间的同构映射.

7. 证明 V 的子空间 U 的正交补空间是唯一的，即若 $V=U\oplus W$, 且对于任意的 $\alpha\in U$ 和任意的 $\beta\in W$, 都有 $(\alpha,\beta)=0$, 则 $W=U^{\perp}$.