第八章　欧氏空间

本章讨论 $\mathbb{R}$ 上带有度量性质的线性空间：欧氏空间. §8.1 介绍内积的概念，从而定义向量的长度和夹角，以及单位向量和向量的正交. §8.2 讨论欧氏空间的标准正交基，正交阵的性质和 Schimidt 正交化方法. 对称变换和对称矩阵的性质在 §8.3 讨论，主结论是每个实对称矩阵都正交相似于对角阵. §8.4 讨论正交变换和正交矩阵，特别地，给出正交矩阵在正交相似下的标准形.

§8.1 欧氏空间，长度，夹角

本章讨论仅限于实数域 $\mathbb{R}$. 第三章讨论的线性空间中向量有加法和数乘两种运算，但缺少许多度量性质，如长度，夹角等. 而度量性质在许多问题有特殊的意义. 所以，有必要引入度量的概念. 从 $\mathbb{R}^3$ 中我们看到，度量性质可以通过向量的内积表示. 将此抽象后，我们引进内积的概念.

定义 8.1.1 设 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，映射 $(-,-): V\times V\to\mathbb{R}$ 称为 **内积**, 如果对于任意的 $\alpha,\beta,\gamma\in V$, $c\in\mathbb{R}$, 都有

(1) 交换律： $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$;

(2) 内积与加法的协调： $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$;

(3) 内积与数乘的协调： $(c\alpha,\beta)=c(\alpha,\beta)$;

(4) 非负性： $(\alpha,\alpha)\geq 0$ 且等号成立的充要条件是 $\alpha=0$.

同时称 V 为关于内积 $(-,-)$ 的 Euclid **空间**, 简称 **欧氏空间**.

显然，解析几何中向量的内积满足定义中的性质，所以构成欧氏空间. 一般地，有

例 1 在实数域上的 n 维列向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 对于 $X=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T, Y=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T\in\mathbb{R}^n$, 定义

$$(X,Y)=X^TY=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

易见， $(-,-)$ 是一个内积. $\mathbb{R}^n$ 关于以上定义的内积构成欧氏空间.

例 2 在实数域上的 n 维列向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 对于 $X=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T, Y=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T\in\mathbb{R}^n$, 定义

$$(X,Y)=a_1b_1+2a_2b_2+\cdots+na_nb_n$$

易见， $\mathbb{R}^n$ 关于以上定义的内积也构成欧氏空间.

对同一个线性空间，关于不同的内积构成不同的欧氏空间. 因此，欧氏空间的定义与内积的选取紧密相关. 所以，欧氏空间也称为内积空间. 今后如无特别说明，欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 总指关于例 1 中的内积构成的欧氏空间.

例 3 设 $C[a,b]$ 是 $\mathbb{R}$ 的闭区间 $[a,b]$ 上连续函数全体构成的线性空间. 对于 $f(x),g(x)\in C[a,b]$, 定义

$$(f(x),g(x))=\int_a^b f(x)g(x)dx.$$

利用积分性质不难验证，这定义了一个内积. $C[a,b]$ 在此内积下成为欧氏空间.

下面讨论欧氏空间的基本性质.

设 V 是关于内积 $(-,-)$ 的欧氏空间. 则对于任意的 $\alpha, \alpha_i, \beta_j \in V$, $c, a_i, b_j \in \mathbb{R}(i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$, 总有

(1) $(0,\alpha)=0$. 事实上，因为 $(0,\alpha)=(0+0,\alpha)=(0,\alpha)+(0,\alpha)$, 所以 $(0,\alpha)=0$.

利用内积定义得到

(2) $(\alpha,\beta+\gamma)=(\alpha,\beta)+(\alpha,\gamma)$;

(3) $(\alpha,c\beta)=c(\alpha,\beta)$;

(4) $(\sum_{i=1}^m a_i\alpha_i, \sum_{j=1}^n b_j\beta_j)=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_ib_j(\alpha_i,\beta_j)$.

定义 8.1.2 设 V 是欧氏空间， $\alpha \in V$. 定义 α 的 **长度** (**或范数**) 为 $\sqrt{(\alpha,\alpha)}$, 记为 $|\alpha|$.

因为内积的条件 (4), $(\alpha,\alpha)\geq 0$, 所以 $\sqrt{(\alpha,\alpha)}$ 有意义. 显然，只有零向量的长度为 0, 其余向量的长度为正数. 长度还满足

$$|c\alpha|=|c||\alpha|,$$

其中 $\alpha\in V$, $c\in\mathbb{R}$. 事实上， $|c\alpha|=\sqrt{(c\alpha,c\alpha)}=\sqrt{c^2(\alpha,\alpha)}=|c||\alpha|$.

长度为 1 的向量称为 **单位向量**. 对于任意非零向量 α, 易知 $\frac{\alpha}{|\alpha|}$ 是单位向量. 从 α 得到单位向量 $\frac{\alpha}{|\alpha|}$ 的过程，称为把 α**单位化**.

在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中，向量 $X=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$ 的长度是

$$\sqrt{(X,X)}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}.$$

下面介绍重要的不等式，它保证了向量夹角定义的合理性.

定理 8.1.1 (Cauchy-Schwarz **不等式**) 设 V 是欧氏空间，对于任意的 $\alpha,\beta\in V$, 总有

$$(\alpha,\beta)^2\leq(\alpha,\alpha)(\beta,\beta).$$

当且仅当 α,β 线性相关时，等号成立.

证明 若 $\alpha=0$, 则左右两式均等零，则不等式的等号成立.
若 $\alpha\neq 0$, 考虑向量 $\beta-t\alpha$, 有

$$0\leq(\beta-t\alpha,\beta-t\alpha)=(\beta,\beta)-2t(\alpha,\beta)+t^2(\alpha,\alpha).$$

视上式为关于 t 的一元二次不等式，则判别式一定小于或等于零，即 $2^2(\alpha,\beta)^2-4(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)\leq 0$. 故

$$(\alpha,\beta)^2\leq(\alpha,\alpha)(\beta,\beta).$$

显然，当且仅当 $\alpha=0$ 或 $\beta-t\alpha=0$ 时等式成立. 即当且仅当 α,β 线性相关时，等号成立. □

在例 1 和例 3 的欧氏空间来看， Cauchy-Schwarz 不等式就是下面例 4 和例 5.

例 4 对于任意的实数 $a_i,b_i(i=1,2,\cdots,n)$, 总有

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leq(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2).$$

例 5 对于 $f(x), g(x) \in C[a,b]$, 总有

$$(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \le \int_a^b f(x)^2 dx \int_a^b g(x)^2 dx.$$

因为 $|(\alpha,\beta)| \le |\alpha||\beta|$, 所以 $-1 \le \frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|} \le 1$. 故下面对于两个向量的夹角的定义是合理的.

定义 8.1.3 在欧氏空间 V 中，定义非零向量 α, β 的 **夹角**θ 由以下式子决定

$$\cos\theta = \frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}, \ \ 0 \le \theta \le \pi.$$

这样，欧氏空间的任意两个非零向量都有夹角 $\theta(0 \le \theta \le \pi)$. 当两个向量的夹角为 $\frac{\pi}{2}$ 时，很自然地称它们是正交的. 为了方便起见，定义零向量与任意向量都正交. 这样我们可以用内积来定义向量的正交.

定义 8.1.4 在欧氏空间 V 中，两个向量 α, β 称为 **正交**, 记为 $\alpha \perp \beta$, 如果

$$(\alpha,\beta) = 0.$$

只有零向量和自己正交. 在 $\mathbb{R}^n$ 中， $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 两两正交.

在欧氏空间 V 中, 如果 α 与 α_i 正交 $(i = 1, 2, \cdots, m)$, 则对于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的线性组合 $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_m\alpha_m$, 有 $(\alpha, a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_m\alpha_m) = a_1(\alpha,\alpha_1) + a_2(\alpha,\alpha_2) + \cdots + a_m(\alpha,\alpha_m) = 0$. 所以 α 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的任意线性组合都正交.

例 6 在 $\mathbb{R}^4$ 中，求一单位向量与 $\alpha_1 = (1, 1, -1, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, -1, -1, 1)^T$, $\alpha_3 = (2, 1, 1, 3)^T$ 均正交.

解 设 $\beta = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 正交，则有

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

解之，得到

$$x_1 = -\frac{4}{3}x_4, \ x_2 = 0, \ x_3 = -\frac{1}{3}x_4.$$

又

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1.$$

解之，得到 $x_4 = \pm\frac{3}{\sqrt{26}}$. 当 $x_4 = \frac{3}{\sqrt{26}}$ 时,

$$x_1 = -\frac{4}{\sqrt{26}}, \ x_2 = 0 \ \ x_3 = -\frac{1}{\sqrt{26}};$$

当 $x_4 = -\frac{3}{\sqrt{26}}$ 时,

$$x_1 = \frac{4}{\sqrt{26}}, \ x_2 = 0, \ x_3 = \frac{1}{\sqrt{26}}.$$

所以

$$\beta = \pm(\frac{-4}{\sqrt{26}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{3}{\sqrt{26}})^T.$$

最后，设 U 是欧氏空间 V 的子空间，则易见 U 关于 V 的内积也构成欧氏空间，称为 **欧氏子空间**.

习题

1. 设 A 是 n 阶是可逆实矩阵，定义映射 $(-,-):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 如下：$(\alpha,\beta)=\alpha^TA^TA\beta$. 求证：$(-,-)$ 是一个内积，因而 $\mathbb{R}^n$ 对于 $(-,-)$ 构成一个欧氏空间.

2. 求证：对于欧氏空间 V 中的任意向量 α,β, 有
(1) $|\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|^2=2|\alpha|^2+2|\beta|^2$;
(2) $(\alpha,\beta)=\frac{1}{4}|\alpha+\beta|^2-\frac{1}{4}|\alpha-\beta|^2$;
(3) (三角不等式) $|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|$.

3. 在 $\mathbb{R}^4$ 中，求 α,β 的夹角.
(1) $\alpha=(2,1,3,2),\beta=(1,2,-2,1)$;
(2) $\alpha=(1,1,1,1),\beta=(0,1,0,0)$.

4. 在欧氏空间 V 中，定义两个向量 α,β 的距离为 $|\alpha-\beta|$. 求证
(1) 当 $\alpha\neq\beta$ 时，$|\alpha-\beta|>0$;
(2) $|\alpha-\beta|=|\beta-\alpha|$;
(3) $|\alpha-\beta|\le|\alpha-\gamma|+|\gamma-\beta|$.

5. 在 $\mathbb{R}^4$ 中，求与向量 $\beta=(1,-1,-1,1),\gamma=(2,1,1,3)$ 正交的所有向量.

6. 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的一个基，证明：
(1) 如果 $\alpha\in V$ 使得 $(\alpha,\xi_i)=0(i=1,2,\cdots,n)$, 那么 $\alpha=0$;
(2) 如果 $\alpha_1,\alpha_2\in V$ 使得 $(\alpha_1,\xi_i)=(\alpha_2,\xi_i)(i=1,2,\cdots,n)$, 那么 $\alpha_1=\alpha_2$.