§5.10 结式和判别式

教学目的与要求 掌握两个一元多项式的结式的定义与公根的刻画；学会计算一元多项式的判别式和用二元二次方程组结式法求解.

一. 公根与公因子

设 $f(x), g(x) \in K[x]$, 我们知道则 $f(x), g(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有公因子的充分必要条件是 $(f(x), g(x)) = d(x) \neq 1$.

引理 设 $(f(x), g(x)) = d(x)$, 则 $d(x) \neq 1$ 的充分必要条件是存在非零多项式 $u(x), v(x) \in K[x]$ 使得 $f(x)u(x) = g(x)v(x)$, 且 $\deg u(x) < \deg g(x), \deg v(x) < \deg f(x)$.

证明 必要性. 设 $d(x) \neq 1$ 令 $f(x) = d(x)v(x), g(x) = d(x)u(x)$, 则 $f(x)u(x) = d(x)v(x)u(x) = g(x)v(x)$ 且 $\deg u(x) < \deg g(x), \deg v(x) < \deg f(x)$.

充分性. 若 $(f(x), g(x)) = 1$, 因为 $f(x)|g(x)v(x)$, 所以 $f(x)|v(x)$. 但 $\deg f(x) > \deg v(x) > 0$, 矛盾.　$\square$.

二. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的结式

设 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, $g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m$, $u(x) = x_0x^{m-1} + x_1x^{m-2} + \cdots + x_{m-1}$, $v(x) = y_0x^{n-1} + y_1x^{n-2} + \cdots + y_{n-1}$, 其中 $x_0, \cdots, x_{m-1}$, $y_0, \cdots, y_{n-1}$ 为待定系数，代入 $f(x)u(x) = g(x)v(x)$, 比较系数得

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_0x_0 & = & b_0y_0 \\ a_1x_0 + a_0x_1 & = & b_1y_0 + b_0y_1 \\ a_2x_0 + a_1x_1 + a_0x_2 & = & b_2y_0 + b_1y_1 + b_0y_2 \\ & \cdots & \\ a_nx_{m-3} + a_{n-1}x_{n-2} + a_{n-2}x_{n-1} & = & b_my_{n-3} + b_{m-1}y_{n-2} + b_{m-1}y_{n-2} + b_{m-2}y_{n-1} \\ a_nx_{m-2} + a_{n-1}x_{m-1} & = & b_my_{n-2} + b_{m-1}y_{n-1} \\ a_nx_{m-1} & = & b_my_{n-1} \end{array}\right.$$

视为 $m+n$ 个未知数 $x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}, y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}$ 的齐次线性方程组，知其系数矩阵的转置矩阵为：

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -b_0 & -b_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b_0 & -b_1 & \cdots & \cdots & -b_m \end{pmatrix}.$$

定义 设 $f(x) = a_0x^n + a_1x_{n-1} + \cdots + a_n, g(x) = b_0x^m + b_1x_{m-1} + \cdots + b_m$,
定义下列 $m+n$ 阶行列式：

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m \end{vmatrix}$$

称为 f 与 g 的结式.

定理 设 $f(x), g(x) \in K[x]$, 则 $f(x), g(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有公共根的充分必要条件是 $R(f,g) = 0$.

推论 设 $f(x), g(x) \in K[x]$, 则 $(f(x), g(x)) = 1$ 的充分必要条件是 $R(f,g) \neq 0$.

定理 设 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$,$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m$, $f(x)$ 的根为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, $g(x)$ 的根为 $y_1, \cdots, y_n$, 则 $R(f,g) = a_0^m b_0^n \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^m (x_j - y_i)$.

证明 令 $f(x) = a_0f_1(x), g(x) = b_0g_1(x)$, 则 $f(x)$ 与 $f_1(x)$ 有相同根， $g(x)$ 与 $g_1(x)$ 有相同根，由结式定义可知

$$R(f,g) = a_0^m b_0^n R(f_1, g_1).$$

只要考虑 f, g 为首项系数为 1 即可. 由 Vieta 定理知 $-a_1, a_2, \cdots, (-1)^n a_n$ 是 $x_1, x_2, \cdots,$

x_n 的初等对称多项式，$-b_1, b_2, \cdots, (-1)^m b_m$ 是 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的初等对称多项式. 因此 $R(f,g)$ 是关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的多项式并且对于 $x_1, \cdots, x_n$ 是对称多项式, 对于 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 也是对称多项式. 又因为 $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$, $g(x) = (x-y_1)(x-y_2)\cdots(x-y_m)$, 当 $x_1 = y_1$ 时， $f(x)$ 与 $g(x)$ 有公共根，即 $R(f,g) = 0$, 若将 $R(f,g)$ 视为 x_1 的多项式，则 $x_1 - y_1$ 是 $R(f,g)$ 的因式，同理， $x_j - y_1$ 是 $R(f,g)$ 的因式，同理 $x_j - y_i, 1 \le j \le n, 1 \le i \le m$ 都是 $R(f,g)$ 的因式，视为多元多项式，这些 $x_j - y_i$ 两两互素．因此，

$$R(f,g) = h(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} (x_j - y_i). \tag{1}$$

下面证明 $h(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) = 1$.

将 (1) 式两式表为 x_1 的多项式，由 $R(f,g)$ 的定义，它也是关于 x_1 的 m 次多项式，因而 h 是关于 x_1 的 0 次多项式，同时 $x_2, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m$ 在 h 中均为零次，即 h 是常数 c, 故

$$R(f,g) = c \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} (x_j - y_i), \tag{2}$$

常数与 x_j, y_i 无关，因此与 f, g 的具体形式无关．取 $g(x) = x^m$, 即 $g(x)$ 的根 $y_i = 0 (1 \le i \le m)$, 则 (2) 式右边为 $c x_1^m x_2^m \cdots x_n^m$. 由定义 $R(f,g)$,

$$(-1)^{(m+1)+\cdots+(m+n)+1+\cdots+n} = (-1)^m n (-1)^n,$$

所以 $c = 1$. □

注 $R(f,g) = a_0^m \prod_{j=1}^{n} g(x_j) = (-1)^{mn} b_0^m \prod_{j=1}^{m} f(y_j)$.

三. 多项式的判别式.

定义 设 $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ 的判别式为

$$\triangle(f) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} a_0^{-1} R(f, f').$$

定理 多项式 $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ 的判别式为等于

$$\triangle(f) = a_0^{2n-2} \prod_{1 \le j < i \le n} (x_j - x_i)^2.$$

证明 由上面证明知

$$R(f,g)=a_0^m\prod_{j=1}^n g(x_j).$$

令 $g(x)=f'(x), \deg f(x)=n-1$, 则 $R(f,f')=a_0^{n-1}\prod_{j=1}^n f'(x_j)$. 又

$$f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n),$$

$$f'(x)=a_0[\sum_{i=1}^n \phi(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)],$$

$$f'(x_j)=a_0(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n),$$

所以

$$R(f,f')=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}a_0^{2n-1}\prod_{1\le j<i\le n}(x_j-x_i)^2.$$

□

例 1 ax^2+bx+c 的判别式为

$$a^2(x_1-x_2)^2=a^2[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]=a^2(\frac{b^2}{a^2}-4\frac{c}{4})=b^2-4ac.$$

推论 $f(x)$ 有重根的充分必要条件是 $\triangle(f)=0$.

四. 求解二元高次方程组

求解

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases} \tag{3}$$

设 $f(x,y)=a_0(y)x^s+a_1(y)x^{s-1}+\cdots+a_s(y)$, $g(x,y)=b_0(y)x^t+b_1(y)x^{t-1}+\cdots+b_t(y)$, 且 $a_0(y)\neq 0\neq b_0(y)$. 则 f,g 可视 x 为未定元的结式是关于 y 的多项式，即

$$\varphi(y):=R_x(f,g)=\begin{vmatrix} a_0(y) & a_1(y) & \cdots & & & & & a_s(y) \\ & \cdots & & & \cdots & & & \\ & & \cdots & & & \cdots & & \\ & & & a_0(y) & \cdots & & \cdots & a_s(y) \\ b_0(y) & b_1(y) & \cdots & \cdots & b_t(y) & & & \\ & \cdots & & & & \cdots & & \\ & & \cdots & & & & \cdots & \\ & & & b_1(y) & & & & b_t(y) \end{vmatrix}$$

若 (α,β) 是 (3) 的解，则 $f(x,\beta),g(x,\beta)$ 有公共根 α, 故 $f(x,\beta),g(x,\beta)$ 的结式为 0, 即 β 是 $\varphi(y)$ 的解. 反之，若 β 是 $\varphi(y)$ 的解，则 $f(x,\beta),g(x,\beta)$ 有公共根.

这样,求 (3) 解的问题,化为求解 $\varphi(y)=0$. 求出 $\varphi(y)$ 的解 β, 代入 $\left\{\begin{array}{l} f(x,\beta)=0 \\ g(x,\beta)=0 \end{array}\right.$ ，可求 (3) 的解.

例 2 求解方程

$$\left\{\begin{array}{l} f(x,y)=x^2y+3xy+2y+3=0 \\ g(x,y)=2xy-2x+2y+3=0 \end{array}\right. \tag{4}$$

解：$f(x,y)=yx^2+(3y)x+(2y+3)$,

$g(x,y)=(2y-2)x+(2y+3)$.

$$R_x(f,g)=\left|\begin{array}{ccc} y & 3y & 2y+3 \\ 2y-2 & 2y+3 & 0 \\ 0 & 2y-2 & 2y+3 \end{array}\right|=2y^2+11y+12.$$

易见 $R_x(f,g)$ 有根 $\beta_1=-4,\beta_2=-\frac{3}{2}$.

将 $\beta_1=-4$ 代入 (4),

$$\left\{\begin{array}{rl} f(x,-4)= & -4x^2-12x-5 \\ g(x,-4)= & -10x-5 \end{array}\right.$$

求得公共根 $\alpha_1=-\frac{1}{2}$.

将 $\beta_2=-\frac{3}{2}$ 代入 (4) 得

$$\left\{\begin{array}{c} f(x,-\frac{3}{2})=-\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}x \\ g(x,-\frac{3}{2})=-5x \end{array}\right.$$

求得公共解 $\alpha_1=0$.

所以原方程有两个解：$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1=-\frac{1}{2} \\ \beta_1=-4 \end{array}\right.$ 及 $\left\{\begin{array}{c} \alpha_2=0 \\ \beta_1=-\frac{3}{2} \end{array}\right.$.

注 如果多于两个方程情况，可先求两个方程的公共解，带入验证是否为方程的解；如果多于两个变元的高次方程组，也采用类似方法逐个消去未知数.

作业： P_{226} 2, 3, P_{227} 5;

补充：求解方程组 $\begin{cases} x^2+y^2-3x-y=0 \\ x^2+6xy-y^2-7x-11y+12=0 \end{cases}$

选做： P_{227} (习题 5.10) 6; P_{228} 15; 16; 17; 18.