# §5.9 对称多项式

**教学目的与要求** 正确理解对称多项式的基本定理, 掌握将对称多项式化为初等对称多项式的多项式的方法；掌握 Newton 公式，能用于具体计算.

## 一. 对称多项式.

**定义** 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in K[x_1,\cdots,x_n]$, 如果对于任意的 $1\le i\ne j\le n$, 有

$$f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n),$$

则称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $K$ 上 $n$ 元对称多项式.

**例** $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ 是三元对称多项式，不是四元对称多项式.　$x_1^2-x_1x_2$ 不是二元对称多项式.

**注** $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $n$ 元对称多项式的充分必要条件是对 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的任意排列 $(x_{k_1},x_{k_2},\cdots,x_{k_n})$, 有 $f(x_{k_1},x_{k_2},\cdots,x_{k_n})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

**命题** 对称多项式之和是对称多项式；对称多项式之积是对称多项式；对称多项式的多项式是对称多项式.

**证明** 设 $g(x_1,\cdots,x_n),h(x_1,\cdots,x_n)$ 是对称多项式. 则

$$g(\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots)+h(\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots)$$

$$=g(\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots)+h(\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots);$$

$$g(\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots)h(\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots)$$

$$=g(\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots)h(\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots).$$

设 $f_i(x_1,\cdots,x_n),1\le i\le m$ 是 $K[x_1,\cdots,x_n]$ 的对称多项式，　$g(y_1,\cdots,y_m)$ 是 $K[y_1,\cdots,y_m]$ 上的多项式，则

$$h(x_1,\cdots,x_n)=g(f_1(x_1,\cdots,x_n),f_2(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_n))$$

也是关于 $x_1,\cdots,x_n$ 的对称多项式.　□

二. 对称多项式的基本定理.

下列对称多项式称为初等对称多项式:

$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \Sigma_{i=1}^n x_i$

$\sigma_2 = x_1x_2 + \cdots + x_1x_n + \cdots + x_{n-1}x_n = \Sigma_{1\le i<j\le n} x_ix_j$

$\sigma_3 = \Sigma_{1\le i<j<k\le n} x_ix_jx_k$

...

$\sigma_n = x_1x_2\cdots x_n.$

**注** 设 $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$, 则 $f(x) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} + \cdots + (-1)^n\sigma_n$.

下面定理指出:任意对称多项式都可唯一表示为初等对称多项式的多项式.

**对称多项式基本定理** 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 $K$ 上对称多项式, 则必存在 $K$ 上唯一多项式 $g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$, 使得 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = g(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$.

**证明** 存在性. 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 以字典排列的首项系数为 $ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$, $a \neq 0$, 则必有 $i_1 \ge i_2 \cdots \ge i_n$. 事实上, 因为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是对称多项式, 若 $i_1 < i_2$, 则 $x_1^{i_2}x_2^{i_1}\cdots x_j^{i_j}\cdots x_n^{i_n}$ 也是此多项式的单项式, 与字典排列矛盾.

令 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a\sigma_1^{i_1-i_2}\sigma_2^{i_2-i_3}\cdots\sigma_{n-1}^{i_{n-1}}\sigma_n^{i_n}$, 显然 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为对称多项式,且首项为 $ax_1^{i_1-i_2}(x_1x_2)^{i_2-i_3}\cdots(x_1\cdots x_n)^{i_n} = ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$, 与 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的首项相同.

令 $f_1(x_1, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_n) - g(x_1, \cdots, x_n)$, 则 $f_1(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $x_1, \cdots, x_n$ 的对称多项式, 首项系数的字典排列在 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 的首项排列之后. 重复上述做法,得到 $f_0 = f$, $f_1 = f_0 - g_1$, $f_2 = f_1 - g_2, \cdots, f_{s-1} = f_{s-2} - g_{s-1}, f_s = f_{s-1} - g_s = 0$, 于是 $f = f_1 + g_1 = f_2 + g_1 + g_2 = \cdots = g_1 + g_2 + \cdots + g_s$, 而 $g_i$ 是 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 的多项式, 故 $f$ 可表示为 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 的多项式.

唯一性: 设 $g(y_1, y_2, \cdots, y_n), h(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 是 $K$ 上 $n$ 元多项式, 使

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = g(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n) = h(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n).$$

令 $\varphi(y_1, y_2, \cdots, y_n) = g(y_1, y_2, \cdots, y_n) - h(y_1, y_2, \cdots, y_n)$, 则 $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n) = 0$, 我们要证 $\varphi(y_1, y_2, \cdots, y_n) = 0$. 反证法. 否则, 假设 $\varphi(y_1, y_2, \cdots, y_n) = ay_1^{k_1}y_2^{k_2}\cdots y_n^{k_n} +$

$by_1^{j_1}y_2^{j_2}\cdots y_n^{j_n}+\cdots$, 其中 $a,b,\cdots$ 均不为 0, 且各单项式中无同类项, 在 $\varphi(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$ 中

$$\begin{aligned} a\sigma_1^{k_1}\sigma_2^{k_2}\cdots\sigma_n^{k_n} &= ax_1^{k_1}(x_1x_2)^{k_2}\cdots(x_1x_2\cdots x_n)^{k_n}+\cdots \\ &= ax_1^{k_1+k_2+\cdots+k_n}x_2^{k_2+k_3+\cdots+k_n}\cdots x_n^{k_n}+\cdots, \\ b\sigma_1^{j_1}\sigma_2^{j_2}\cdots\sigma_n^{j_n} &= bx_1^{j_1}(x_1x_2)^{j_2}\cdots(x_1x_2\cdots x_n)^{j_n}+\cdots \\ &= bx_1^{j_1+j_2+\cdots+j_n}x_2^{j_2+j_3+\cdots+j_n}\cdots x_n^{j_n}+\cdots, \end{aligned}$$

因此 $a\sigma_1^{k_1}\sigma_2^{k_2}\cdots\sigma_n^{k_n}$ 与 $b\sigma_1^{j_1}\sigma_2^{j_2}\cdots\sigma_n^{j_n}$ 等化为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的多项式后首项均不相同，因此 $\varphi(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)\neq 0$. 矛盾. □

**例** 1 将 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2^2x_3+x_2x_3^2$ 表为 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 的多项式.

**证明** (法一)$f(x_1,x_2,x_3)$ 的首项系数为 $x_1^2x_2$, 令
$\sigma_1^{2-1}\sigma_2=\sigma_1\sigma_2=(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2+3x_1x_2x_3$, 所以 $f(x_1,x_2,x_3)=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3$.

(法二) 这是齐次多项式，首项为 $x_1^2x_2$, 指标集为 $(2,1,0)$. 证明过程中指标 $f_i$ 的首项指标集只能为 $(1,1,1)$, 相应的单项式为 $\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0=\sigma_1\sigma_2$, $\sigma_1^{1-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^1=\sigma_3$.

设 $f=\sigma_1\sigma_2+b\sigma_3$, 令 $x_1=x_2=x_3=1,\sigma_1=3,\sigma_2=3,\sigma_3=1.f(x_1,x_2,x_3)=6$. 由 $6=3\cdot3+b\cdot1$ 得 $b=-3$, 因此 $f(x_1,x_2,x_3)=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3$. □

**例** 2 将对称多项式 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_3^2)(x_2^2+x_3^2)$ 表为初等对称多项式的多项式.

**证明** $f$ 是齐次多项式，次数为 6, 首项为 $x_1^4x_2^2$, 指标为 $(4,2,0)$, 次数为 6, 指标比 $(4,2,0)$ 小的只可能是 $(4,1,1),(3,3,0),(3,2,1),(2,2,2)$, 相应的单项式为 $\sigma_1^{4-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^1=\sigma_1^3\sigma_3,\sigma_1^{3-3}\sigma_2^{3-0}\sigma_3^0=\sigma_2^3,\sigma_1^{3-2}\sigma_2^{2-1}\sigma_3^1=\sigma_1\sigma_2\sigma_3,\sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-2}\sigma_3^2=\sigma_3^2$, 设

$$f=\sigma_1^2\sigma_2^2+a\sigma_1^3\sigma_3+b\sigma_2^3+c\sigma_1\sigma_2\sigma_3+d\sigma_3^2,$$

取 $x_1,x_2,x_3$ 特殊值，得到 $a=-2,b=-2,c=4,d=-1$. 所以 $f=\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_1^3\sigma_3-2\sigma_2^3+4\sigma_1\sigma_2\sigma_3-\sigma_3^2$.

**注** 若 $f$ 非齐次多项式，将 $f$ 分解为齐次多项式之和.

三. Newton 公式

**Newton 公式**

令 $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$,

当 $k \leq n$ 时，有 $s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - \cdots + (-1)^{k-1}s_1\sigma_{k-1} + (-1)^k k\sigma_k = 0.$

当 $k > n$ 时，有 $s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - \cdots + (-1)^n s_{k-n}\sigma_n = 0.$

**引理** 设 $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n\sigma_n$, 则

$$x^{k+1}f'(x) = (s_0x^k + s_1x^{k-1} + \cdots + s_{k-1}x + s_k)f(x) + g(x),$$

其中 $\deg g(x) < n$.

**证明** 因 $f'(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x-x_i}f(x)$, 所以

$$x^{k+1}f'(x) = \sum_{i=1}^n \frac{x^{k+1}}{x-x_i}f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{x^{k+1}-x_i^{k+1}}{x-x_i}f(x) + \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{k+1}}{x-x_i}f(x)$$

$$= \sum_{i=1}^n (x^k + x_ix^{k-1} + x_i^2x^{k-2} + \cdots + x_i^{k-1}x + x_i^k)f(x) + g(x),$$

这里 $g(x) = \frac{x_i^{k+1}}{x-x_i}f(x)$, 显然 $\deg g(x) < n$. 因此,

$$x^{k+1}f'(x) = (s_0x^k + s_1x^{k-1} + \cdots + s_{k-1}x + s_k)f(x) + g(x),$$

其中 $\deg g(x) < n$. $\square$

**Newton 公式的证明**

因为 $f(x) = x^n - \sigma_1x^{n-1} + \cdots + (-1)^i\sigma_ix^{n-i} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}x + (-1)^n\sigma_n$, 所以

$$x^{k+1}f'(x) = x^{k+1}[nx^{n-1} - (n-1)\sigma_1x^{n-2} + \cdots + (n-i)(-1)^i\sigma_ix^{n-i-1}$$

$$+ \cdots + 2(-1)^{n-2}\sigma_{n-2}x + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}].$$

由引理知

$$x^{k+1}[nx^{n-1} - (n-1)\sigma_1x^{n-2} + \cdots + (-1)^i(n-i)\sigma_ix^{n-i-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}]$$

$$= (s_0x^k + s_1x^{k-1} + \cdots + s_{k-1}x + s_k)(x^n - \sigma_1x^{n-1} + \cdots + (-1)^n\sigma_n) + g(x).$$

当 $k \le n$ 时，比较上式两端 $x^n$ 的系数，因为 $\deg g(x) < n$, 得到

$$(-1)^k(n-k)\sigma_k = s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} + \cdots + (-1)^k \sigma_k s_0,$$

故有

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} + \cdots + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1 + (-1)^k k\sigma_k = 0.$$

当 $k > n$ 时，上式左端 $x^n$ 的系数为 0, 故有

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} + \cdots + (-1)^n \sigma_n s_{k-n} = 0. \quad \square$$

**例** 3 $n = 3$ 时,

$s_1 = x_1 + x_2 + x_3 = \sigma_1$,

$s_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1+x_2+x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$,

$s_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1+x_2+x_3)^3 - 3s(x_1^2x_2) - 6x_1x_2x_3$.

而 $s(x_1^2x_2) = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$, 所以

$$s_3 = \sigma_1^3 - 3(\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3) - 6\sigma_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3.$$

求 $s_3$ 第二种方法: 由 Newton 公式，$s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2 - 3\sigma_3 = 0$. 所以 $s_3 = s_2\sigma_1 - s_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)\sigma_1 - \sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$. 同理，$s_4 - s_3\sigma_1 + s_2\sigma_2 = 0$. 故 $s_4 = s_3\sigma_1 - s_2\sigma_2 = (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2)\sigma_1 - (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)\sigma_2 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2$.

**例** 4 解下列方程组:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 4 \\ x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 4 \end{cases}$$

**解** 设 $x_1, x_2, x_3, x_4$ 是 4 次复系数多项式 $f(x) = x^4 - \sigma_1 x^3 + \sigma_2 x^2 - \sigma_3 x + \sigma_4$ 的根. 由已知 $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 4$, 利用 Newton 公式可得 $\sigma_1 = 4, \sigma_2 = 6, \sigma_3 = 4, \sigma_4 = 1$, 即 $x_1, x_2, x_3, x_4$ 是 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$ 的 4 个根，但 $f(x) = (x-1)^4$, 故 $x_i = 1, 1 \le i \le 4$ 为方程组的解.

**例** 5 求一个 $n$ 次方程使 $s_1 = s_2 = \cdots = s_{n-1} = 0$.

**解** 由 Newton 公式得 $\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_{n-1} = 0$, 所以 $x^n + (-1)\sigma_n = 0$, 即 $x^n + a = 0$ 为所求的一个多项式.

作业： $P_{221}$ 1.(1), 2, 3($n=3$), 4.

补充 1: 设 $f$ 是包含单项式 $x_1^3 x_2$ 的项数最小的三元对称多项式，请写出 $f$, 并将 $f$ 表示用初等对称多项式表示.

补充 2: 求一个 $n$ 次多项式使 $s_2 = s_3 = \cdots s_n = 0$.

思考：设某个 6 次多项式满足 $s_1 = s_3 = 0$, 则

$$\frac{s_7}{7} = \frac{s_5}{5} \cdot \frac{s_2}{2}.$$

挑战题： $P_{221}$.6.