§5.8 多元多项式

教学目的与要求 掌握多元多项式的字典排列法和齐次排列法，理解多元多项式与多元多项式函数的关系.

一. 定义

设 K 是一个数域， $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是未定元. 形如 $ax_1^{k_1}x^{k_2}\cdots x^{k_n}$ 的式子称为单项式，其中， a 称为单项式的系数. 当 $a \neq 0$ 时， $k_1 + \cdots + k_n$ 称为单项式的次数. 两个单项式除系数外其余相同，称为同类项.

有限个单项式的和

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum a_{i_1 i_2 \cdots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$$

称为 n 元多项式，我们总假设 n 元多项式表达式中同类项已经合并. n 元多项式的次数是指系数非零的单项式的次数中最大的单项式的次数.

二. 多元多项式的运算

两个多项式相等，如果所有同类项的系数全部相等. 定义两个多项式加法，将所有同类项系数相加. 两个单项式 $ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$ 和 $bx_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_n^{j_n}$ 的乘法为

$$(ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n})(bx_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_n^{j_n}) = abx_1^{i_1+j_1}x_2^{i_2+j_2}\cdots x_n^{i_n+j_n}.$$

两个多项式乘法即按分配律化为各单项式乘积之和. 多项式的数乘定义为

$$c(\sum a_{i_1 i_2 \cdots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}) = \sum ca_{i_1 i_2 \cdots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}.$$

记 $K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 为数域 K 上 n 元多项式的全体，则 $K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 在上面定义的加法，数乘，乘法运算构成带单位元的交换的 K- 代数.

三. 字典排列法与齐次排列法

字典排列法 每个单项式 $ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$ 对应 n 元数组 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$. 两个数组 $(i_1, i_2, \cdots, i_n), (j_1, j_2, \cdots, j_n)$. 若满足： $i_1 = j_1, i_2 = j_2, \cdots, i_{l-1} = j_{l-1}, i_l > j_l$, 则称

$(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 先于 $(j_1, j_2, \cdots, j_n)$, 记 $(i_1, i_2, \cdots, i_n) > (j_1, j_2, \cdots, j_n)$. 这样就给所有 n 元数组一个顺序，对应地给所有单项式一个顺序.

注 字典排列法中首项系数未必次数最大，末项也未必次数最小.

一个多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为 k 次齐次多项式，如果它的每个单项式都是 k 次，即

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum a_{i_1 i_2 \cdots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}, \text{其中} i_1 + i_2 + \cdots + i_n = k.$$

两个次数相同的齐次多项式之和若非零，必仍为同次齐次多项式；任意两个齐次多项式的乘积仍为齐次多项式.

齐次排列法 将多项式各次数相同的项放在一起, 用次数高低表为若干个齐次多项式之和.

注 当 $n = 1$ 时，不论是字典排列法或齐次排列法，与一元多项式的次数排列法一致.

四. 多项式乘法的性质

引理 若 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 且非零, 按字典排列法, 乘积 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的首项等于 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的首项之积.

证明 按字典排序法, 设 $ax_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$ 时 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的首项，$bx_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n}$ 是 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的首项， $cx_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$ 是 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的非首项的任一单项式， $dx_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n}$ 是 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的非首项的任一单项式. 则

$$(i_1, i_2, \cdots, i_n) > (k_1, k_2, \cdots, k_n)$$

$$(j_1, j_2, \cdots, i_n) > (r_1, r_2, \cdots, r_n)$$

显然

$$(i_1 + j_1, i_2 + j_2, \cdots, i_n + j_n) > (k_1 + r_1, k_2 + r_2, \cdots, k_n + r_n)$$

$$(i_1 + j_1, i_2 + j_2, \cdots, i_n + j_n) > (i_1 + r_1, i_2 + r_2, \cdots, i_n + r_n)$$

$$(i_1 + j_1, i_2 + j_2, \cdots, i_n + j_n) > (k_1 + j_1, k_2 + j_2, \cdots, k_n + j_n)$$

所以 $(ab)x_1^{i_1+j_1}x_2^{i_2+j_2}\cdots x_n^{i_n+j_n}$ 是 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的首项. $\square$

命题 若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0, g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$, 则

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0.$$

证明 因为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的首项不为 0, 故 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的首项不为 0, 所以 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$. $\square$

推论 若 $h(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$, 若

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)h(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g(x_1,x_2,\cdots,x_n)h(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

则

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

五. 多元多项式与多元多项式函数的关系

引理 设 $0\neq f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in K[x_1,x_2,\cdots,x_n]$, 则必存在 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in K$, 使得 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)\neq 0$.

证明 对未定元个数 n 作归纳法. 当 $n=1$ 时, $f(x)$ 在 K 上最多只有 m 个根, 故总存在 $a\in K$, 使 $f(a)\neq 0$.

现设对 $n-1$ 个未定元的多项式结论成立, 将 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表为未定元 x_n 的多项式:

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=b_mx_n^m+b_{m-1}x_n^{m-1}+\cdots+b_1x_n+b_0,$$

其中 $b_i=b_i(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})\in K[x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}]$. 因 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$, 故可设 $b_m(x_1,\cdots,x_{n-1})\neq 0$. 由归纳假设知存在 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$, 使 $b_m(a_1,\cdots,a_{n-1})\neq 0$. 因而

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},x_n)=b_m(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1})x_n^m++\cdots+b_0(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1})$$

是以 x_n 为未定元的一元 m 次非零多项式,故存在 $a_n\in K$, 使 $f(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},a_n)\neq 0$. $\square$

命题 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n),g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in K[x_1,x_2,\cdots,x_n]$, 则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 作为多项式相等的充分必要条件是他们作为函数相等，即对任意 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in K$, 都有 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=g(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

证明 只需证充分性．记

$$h(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)-g(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

若 $h(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$, 由引理必存在 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in K$, 使 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)\neq g(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, 矛盾． □

六．例题

例 1 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n),g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in K[x_1,\cdots,x_n]$, 且 $g(x_1,\cdots,x_n)\neq 0$, 若对一切使 $g(a_1,a_2,\cdots,a_n)\neq 0$ 的 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in K$, 均有 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=0$, 则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$.

证明 由已知条件知对任意的 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in K$, 均有

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)g(a_1,\cdots,a_n)=0.$$

故 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$, 由于 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$, 由命题知 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$.

例 2 设 $A,B,C,D\in K^{n\times n}$, 且 $AC=CA$, 则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|AD-CB|$$

证明 由线性方程组理论知，对给定的矩阵 C, 所有适合 $AC=CA$ 的矩阵 A 必可由 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 线性表示，其中 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是 $AC=CA$ 的一个 ”基础解系 ”.

定义 $g(x_1,x_2,\cdots,x_k)=|x_1A_1+x_2A_2+\cdots+x_kA_k|$, 即为满足条件 $AC=CA$ 的矩阵 A 的行列式．进而设

$$\begin{aligned}&f(x_1,x_2,\cdots,x_k)\\&=\begin{vmatrix} x_1A_1+x_2A_2+\cdots+x_kA_k & B \\ C & D \end{vmatrix}-|(x_1A_1+x_2A_2+\cdots+x_kA_k)D-CB|.\end{aligned}$$

则对一切 $x_1, x_2, \cdots, x_k \in K$, 当 $g(x_1, x_2, \cdots, x_k) \neq 0$ 时， $AC = CA$, 且

$$\begin{pmatrix} I & \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

两边取行列式,得 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B| = |AD - CB|$. 即 $f(x_1, x_2, \cdots, x_k) = 0$. 而显然 $g(x_1, x_2, \cdots, x_k) \neq 0$, 由例 1 知 $f(x_1, x_2, \cdots, x_k) = 0$, 即对任意 $A \in K^{n\times n}$, $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$. □

注 1 以上证法由 2007 级胡继龙给出，而 2006 级黄招腾指出下列证法是错误的，因为该证法不保证 $AC = CA$ 成立.

当 $|A| \neq 0$ 时,

$$\begin{pmatrix} I & \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

两边取行列式，得 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B| = |AD - CB|$.

设 $g(x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n}, \cdots, x_{nn}) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}$,

$$\begin{aligned} & f(x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n}, \cdots, x_{nn}) \\ = & \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} & B \\ C & D \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} D - CB \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

则对一切 $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{nn} \in K$, 当 $g(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{nn}) \neq 0$ 时,有 $f(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{nn}) = 0$. 而显然 $g(x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{nn}) \neq 0$, 由例 1, 知 $f(x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{nn}) = 0$, 即对任意 $A \in K^{n\times n}$, $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$.

注 2 用此题的办法可将一些关于矩阵命题中要求某个矩阵可逆的条件去掉.

作业： P_{215}. 2; 3.

补充 1: 设 $A \in K^{n\times n}$, 求证 $|A^*| = |A|^{n-1}$. (提示： $|A^*|$ 可视为 $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}$ 的多项式.)

补充 2: 请写出多元多项式乘法与次数的关系，并证之.

补充 3: 课本引理 $5.8-1$ 改为齐次排列法，结论是否成立？为什么？

选做：设 $f(x), g(x)$ 在 $K[x]$ 中互素，求证： $yf(x)+g(x)$ 在 $K[x,y]$ 中不可约. (注：多元多项式不可约是指其不能分解为两个次数比它低的多元多项式的乘积)

挑战题：考虑关于矩阵命题中，哪些可去掉 ” 可逆 ” 条件？将其罗列并证明.