§5.7 实系数多项式和有理系数系数多项式

教学目的和要求 熟练掌握实系数多项式的标准形；学习一些解决实系数多项式问题的方法和技巧. 学会用综合除法等方法求一些有理系数多项式的有理根. 理解整系数多项式在有理数域上可约性的关系，熟练应用 Einsenstein 判别法. 了解有理系数多项式分解问题的一些技巧与方法.

一. 实系数多项式的标准形

定理 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[X]$. 若 $a+bi$ (其中 $b \neq 0, a, b \in \mathbb{R}$) 是 $f(x)$ 的根，则 $a-bi$ 也是它的根.

证明 令 $p(x) = (x-(a+b_i))(x-(a-b_i)) = x^2 - 2ax + (a^2+b^2) \in \mathbb{R}[x]$, 则 $p(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上不可约多项式. 又因 $p(x)$ 与 $f(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有公共根 $a+bi$, 所以 $p(x)|f(x)$, 故 $a-bi$ 是 $f(x)$ 的根. □

推论 实数域上不可约多项式或为一次或二次多项式 ax^2+bx+c, 其中 $b^2-4ac<0$.

所以实数域上一元多项式的标准分解式为：

$$f(x) = d(x-a_1)^{l_1}\cdots(x-a_m)^{l_m}(x^2+b_1x+c_1)^{h_1}\cdots(x^2+b_rx+c_r)^{h_r}$$

其中 $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, a_i 两两互异， $b_i^2-4c_i<0$, $x^2+b_ix+c_i$ 两两互素， l_i, h_i 是正整数.

例 1 设 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg f(x)$ 为奇数，则 $f(x)$ 必有实数根.

证明 由 $f(x)$ 的标准分解式, 因 $\deg f(x)$ 为奇数, 所以必有形如 $x-a$ 的因子, 其中 $a \in \mathbb{R}$. □

例 2 方程 $x^8+5x^6+4x^4+2x^2+1=0$ 无实根.

证明 对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$, 总有 $\alpha^8+5\alpha^6+4\alpha^4+2\alpha^2+1>0$. □

例 3 设 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, 则在 $f(x)$ 的两个实根之间存在 $f'(x)$ 的一个根.

注 《数分》中的洛尔引理.

例 4 已知 $c_0+\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{3}+\cdots+\frac{c_n}{n+1}=0, c_i\in\mathbb{R}, 0\le i\le n$. 证明:

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n$$

至少有一个实根.

证明 令 $g(x)=c_0x+\frac{c_1}{2}x^2+\cdots+\frac{c_n}{n+1}x^{n+1}\in\mathbb{R}[X]$, 则 $g(1)=0, g(0)=0$. 所以存在 $\alpha\in\mathbb{R}$, 使 $g'(\alpha)=0$, 而 $g'(x)=f(x)$, 即 $f(\alpha)=0$. □

例 5 设 $f(x)\in\mathbb{R}[x]$, 若 $f(x)$ 只有实根. 证明: 若 α 是 $f'(x)$ 的重根, 则 $f(\alpha)=0$.

证明 $f(x)=a(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$, 则 $f'(x)=a(\sum_{i=1}^n\frac{1}{x-a_i})f(x)$, $f''(x)=a[-\sum_{i=1}^n\frac{1}{(x-a_i)^2}]f(x)+a(\sum_{i=1}^n\frac{1}{x-a_i})f'(x)$. 若 $f(\alpha)\neq 0$ 则 $\alpha\neq a_i, 1\le i\le n$. 因 α 是 $f'(x)$ 的重根, 所以 $f''(\alpha)=f'(\alpha)=0$ 代入上式, 得 $f(\alpha)=0$. 矛盾. 故 $f(\alpha)=0$. □

二. 整系数多项式的有理根

定理 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是整系数多项式, 则有理数 $\frac{q}{p}$ 是 $f(x)$ 的根的必要条件是 $p|a_n, q|a_0$. 其中 p, q 是互素的整数.

证明 将 $\frac{q}{p}$ 代入 $f(x)$, 得到

$$f(\frac{q}{p})=a_n(\frac{q}{p})^n+a_{n-1}(\frac{q}{p})^{n-1}+\cdots+a_1(\frac{q}{p})+a_0=0.$$

在等式两边乘以 p^n, 得

$$a_nq^n+a_{n-1}q^{n-1}p+\cdots+a_1qp^{n-1}+a_0p^n=0.$$

故有 $q|a_0, \quad p|a_n$. □

定理 设 α 是整系数多项式 $f(x)$ 的整数根, 则 $\frac{f(1)}{\alpha-1}$ 与 $\frac{f(-1)}{\alpha+1}$ 都是整数.

证明 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$. 因为 α 是 $f(x)$ 的整数根, 所以 $f(x)=(x-\alpha)g(x)$, 这里 $g(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0$. 比较两边系数, 得 $a_n=b_{n-1}, a_{n-1}=b_{n-2}-b_{n-1}\alpha, \cdots, a_1=b_0-b_1\alpha$. 因为 $\alpha, a_i\in\mathbb{Z}, 0\le i\le n$, 所以 $b_i\in\mathbb{Z}, 0\le j\le n-1$, 即 $g(x)$ 是整系数多项式. 故有 $\frac{f(1)}{\alpha-1}=-g(1)\in\mathbb{Z}$, $\frac{f(-1)}{\alpha+1}=-g(-1)\in\mathbb{Z}$. □

例 6 证明 $f(x)=x^5-12x^3+36x+12$ 没有有理根.

证明 若 $f(x)$ 存在有理根，则它们只能是 $\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12$. 将其逐一代入 $f(x)$ 均不为 0. $\square$

三. 综合除法：

设 $f(x)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上多项式， b 是 $\mathbb{K}$ 上任意数.

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=(x-b)(b_nx^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0)+f(b).$$

展开上式右边，比较左右两式系数，则相应系数关系可用如下综合除法表示：

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ \text{b} & & b_{n-1}b & b_{n-2}b & \cdots & b_1b & b_0b \\ \hline & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & f(b) \end{array}$$

其中第三行元素为上两行相应元素的和.

例 6 中，当 $b=2$ 时，有

$$\begin{array}{c|rrrrrr} & 1 & 0 & -12 & 0 & 36 & 12 \\ 2 & & 2 & 4 & -16 & -32 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & -8 & -16 & 4 & 20 \end{array}$$

表明 $f(2)=20\neq0$, 故 2 非 $f(x)$ 的根.

注 $f(x)=(ax+b)q(x)+r=(x-(-\frac{b}{a}))(aq(x))+r.$

四. 有理系数多项式的可约性与整系数多项式多项式的可约性.

定义 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是整系数多项式,若 $a_n,a_{n-1},\cdots,a_0$ 的最大公因数是 1, 则称 $f(x)$ 为本原多项式.

Gauss **引理** 两个本原多项式之积是本原多项式.

证明 设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$$

是两个本原多项式. 若

$$f(x)g(x)=c^{m+n}x^{m+n}+c_{m+n-1}x^{m+n-1}+\cdots+c_1x+c_0.$$

不是本原多项式，则 $c_0, c_1, \cdots, c_{m+n}$ 必有一个公共的素因子 p. 因 $c_0 = a_0 b_0$, 故 $p|a_0$ 或 $p|b_0$. 不妨设 $p|a_0$. 又 $f(x)$ 是本原多项式，p 不能整除所有 a_i. 设 $p|a_0, p|a_1, \cdots, p|a_{i-1}$, 但 $p \nmid a_i$. 同理，设有某 j, $0 \leq j \leq m$, 使 $p|b_0, p|b_1, \cdots, p|b_{j-1}$, 但 $p \nmid b_j$. 注意到 $1 \leq i + j \leq m + n$,

$$c_{i+j} = \cdots + a_{i-2}b_{j+2} + a_{i-1}b_{j-1} + a_i b_j + a_{i+1}b_{j-1} + \cdots,$$

p 可整除右式中除 $a_i b_j$ 外其余项， $p|c_{i+j}$, 所以 $p|a_i b_j$, 但 $p \nmid a_i$ 且 $p \nmid b_j$. 矛盾. □

定理 设 $f(x)$ 是整系数多项式，则 $f(x)$ 在有理数域上可约的充分必要条件是 $f(x)$ 在整数上可约.

证明 充分性是显然的.

必要性. 设 $f(x) = g(x)h(x) \in \mathbb{Q}[x]$, 这里 $\deg g(x), \deg h(x) < \deg f(x)$. 因为 $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$, 所以存在 $a \in \mathbb{Q}$, 使得 $g(x) = ag_1(x)$, 这里 $g_1(x)$ 为本原多项式. 事实上，取 c 是 $g(x)$ 的系数的公分母，则 $g(x) = \frac{1}{c}(cg(x))$, 即 $cg(x)$ 是整系数多项式. 设 d 是 $cg(x)$ 的系数的最大公因数，则 $g_1(x) = \frac{c}{d}g(x)$ 是本原多项式. 令 $a = \frac{d}{c} \in \mathbb{Q}$, 则 $g(x) = ag_1(x), g_1(x)$ 是本原多项式.

同理 $h(x) = bh_1(x), b \in \mathbb{Q}, h_1(x)$ 是本原多项式，于是有

$$f(x) = ab(g_1(x)h_1(x)).$$

由 Gauss 引理，知 $g_1(x)h_1(x)$ 是本原多项式，若 ab 不是整数，则 $abg_1(x)h_1(x)$ 不是整系数多项式，所以对于任意的 $ab \in \mathbb{Z}$. 则 $f(x) = (abg_1(x))h_1(x)$, 即 $f(x)$ 在整数上可约. □

注 设 $f(x)$ 是整系数多项式，则 $f(x)$ 在有理数域上是否可约化为在整数上是否可约的问题.

定理 (Eisenstein **判别法**) 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是整系数多项式， $a_n \neq 0, n \geq 1$, 设 p 是一个素数，满足

(1) $p|a_i, 0 \leq i \leq n-1$;

(2) $p \nmid a_n$;

(3) $p^2 \nmid a_0$,

则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

证明 只要证明 $f(x)$ 在整数上不可约. 若不然，设 $f(x)=(b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0)(c_tx^t+c_{t-1}x^{t-1}+\cdots+c_1x+c_0)$, 其中 $1\le m<n$, $m+t=n$, b_i, c_j 是整数.

显然 $a_n=b_mc_t, a_0=b_0c_0$. 因 $p|a_0$, 所以或 $p|b_0$ 或 $p|c_0$, 但 $p^2\nmid a_0$, 故 $p|b_0$ 与 $p|c_0$ 不同时成立. 不妨设 $p|b_0$, 但 $p\nmid c_0$. 又由假设 $p\nmid b_mc_t$, 所以 $p\nmid b_m$, 且 $p\nmid c_t$. 设 b_i 是 b_0, b_1, $\cdots$, b_m 中第一个不被 p 整除者，即 $p|b_0$, $p|b_1$, $\cdots$, $p|b_{i-1}$, 但 $p\nmid b_i$. 而

$$a_i=b_ic_0+b_{i-1}c_1+\cdots+b_0c_i.$$

注意到 $1\le i\le m<n$, 由条件 $p|a_i$, 又 p 整除右式中除 b_ic_0 外其余项，故 $p|b_ic_0$. 与 $p\nmid b_ic_0$ 矛盾. $\square$

例 7 对于任意的 $n\ge 1, x^n-2$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

证明 取 $p=2$, 由 Einsenstein 判别法知 x^n-2 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约. $\square$

例 8 若 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 是互不相同的 m 个素数，求证：对 $n>1$, 多项式

$$f(x)=x^n-p_1p_2\cdots p_m.$$

在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

证明 取 $p=p_1$, 用 Einsenstein 判别法即得结论. $\square$

例 9 设 $x=ay+b(a\ne 0,a,b\in\mathbb{Z})$, $f(x)$ 是有理系数多项式. 如果 $g(y)=f(ay+b)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可约，则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上也可约.

证明 设 $f(x)=s(x)t(x)$, $s(x),t(x)$ 是有理系数多项式, 且 $\deg(s(x))<\deg(f(x))$, $\deg(t(x))<\deg(f(x))$. 从而 $f(ay+b)=s(ay+b)t(ay+b)$, 即 $g(y)=u(y)v(y)$, 其中 $u(y)=s(ay+b)$, $v(y)=t(ay+b)$, 且 $\deg(g(y))=\deg(f(x))$. 直接验证可得，$u(y),v(y)$ 是有理系数多项式， $\deg(u(y))<\deg(g(x))$, $\deg(v(y))<\deg(g(y))$. 命题得证. $\square$

例 10 若 p 为素数，证明：

$$f(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$$

在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

证明 令 $x=y+1$, 得

$$f(x)=\frac{x^p-1}{x-1}=\frac{(y+1)^p-1}{y}=y^{p-1}+c_p^1y^{p-2}+c_p^2y^{p-3}+\cdots+c_p^{p-1}\doteq g(y).$$

对关于 y 的多项式应用 Eisenstein 判别法，注意到素数 $p|c_p^i$, $1\le i\le p-1$, $p\nmid 1$, $p^2\nmid c_p^{p-1}=p$, 故 $g(y)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约. 再由 §5.4 例 4 知 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上也不可约. □

例 11 证明：当 n 为素数时,

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}.$$

证明 由 Einsenstein 判别法知 $n!f(x)$ 不可约. □

五. 例题

例 12 求 $f(x)=\frac{1}{2}x^4+\frac{5}{6}x^3+\frac{1}{6}x^2+\frac{5}{6}x-\frac{1}{3}$ 的有理根.

解 (I) 将 $f(x)$ 转化为整系数多项式 $f_1(x)$:

$$f(x)=\frac{1}{6}(3x^4+5x^3+x^2+5x-2)=\frac{1}{6}f_1(x).$$

(II) 将 $f(x)$ 转化为首项系数为 1 的多项式 $g(y)$:

$f_1(x)=3x^4+5x^3+x^2+5x-2=\frac{1}{3^3}[(3x)^4+5(3x)^3+3(3x)^2+45(3x)-54]$
$=\frac{1}{3^3}(y^4+5y^3+3y^2+45y-54)=\frac{1}{3^3}g(y)$.

$g(y)$ 的有理根必为整数且时 54 的因子. 而作为 $f_1(x)$ 的根只能是 $\pm1,\pm2,\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3}$. 作为 $g(y),y=3x$ 的根只能是 $\pm3,\pm6,\pm1,\pm2$.

(III) 考虑 $g(y)=y^4+5y^3+3y^2+45y-54$,

观察知满足 Eisenstein 判别法的素数 p 不存在，作综合除法

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 5 & 3 & 45 & -54 \\ 1 & & 1 & 6 & 9 & 54 \\ \hline & 1 & 6 & 9 & 54 & 0 \end{array}$$

所以 $g(y)=(y-1)(y^3+6y+9y+54)=(y-1)g_1(y)$.

由于 $g_1(y)$ 的各项系数均正, 只剩 $-1,-2,-3,-6$ 可选择，$g_1(1)=70,g_1(-1)=50\neq0$.

y	$y-1$	$y+1$
-2	-3	-1
-3	-4	-2
-6	-7	-5

满足 $\frac{g_1(1)}{a-1}, \frac{g_1(-1)}{a+1}$ 为整数的只有 $a=-6$. 由上面命题知，除 $y=-6$ 外，其余均不是 $g_1(y)$ 的整数根. 再作综合除法

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & 9 & 54 \\ -6 & & -6 & 0 & -54 \\ \hline & 1 & 0 & 9 & 0 \end{array}$$

故 -6 是 $g_1(y)$ 的根，这样 $g(y)=(y-1)(y+6)(y^2+9)$.

进一步 $f(x)=\frac{1}{6\cdot 3^3}(3x-1)(3x+6)(9x^2+9)=\frac{1}{6}(3x-1)(x+2)(x^2+1)$.

所以， $f(x)$ 的有理根为 $\frac{1}{3}$ 与 -2.□

例 13 设 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$, 其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是两两不同的整数. 求证 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 上不可约.

证明 只要证明在整数上不可约即可. 反证法. 若不然， $f(x)$ 在整数上可约，即设 $f(x)=g(x)h(x)$, 其中 $\deg g(x), \deg h(x)<n, g(x), h(x)$ 是整系数多项式. 则 $g(a_i)h(a_i)+1=0$. 所以 $g(a_i)=1$ 且 $h(a_i)=-1$, 或 $g(a_i)=-1$ 且 $h(a_i)=1$, 即 $g(x)+h(x)$ 有 n 个不同根. 故 $g(x)=-h(x)$, 即 $f(x)=-h(x)^2$. 而左式首项系数为 1, 右式首项系数为 -1, 矛盾. □

例 14 设 $f(x)=(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_n)^2+1, a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是两两互异整数. 证明： $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 上不可约.

证明 只要证明 $f(x)$ 在整数上不可约即可. 反证法. 设 $f(x)=g(x)h(x)$, 这里 $g(x), h(x)$ 是整系数多项式且 $\deg g(x), \deg h(x)<2n$, 则 $g(a_i)h(a_i)=1$. 所以，或 $g(a_i)=1=h(a_i)$, 或 $g(a_i)=-1=h(a_i)$. 因为对于任意实数 c, 都有 $f(c)>1$. 所以 $f(x)$ 无实根. 故 $g(x), h(x)$ 对任意值均不变号. 不妨设 $g(a_i)=h(a_i)=1, 1\le i\le n$.

若 $\deg g(x)<\deg h(x)$, 则 $\deg g(x)<n$. 所以 $g(a_i)=1,\quad 1\le i\le n$. 故有 $g(x)=1$ 与 $\deg g(x)>0$ 矛盾. 所以 $\deg g(x)=\deg h(x)=n$, 首项系数均为 1. 由 $g(a_i)=h(a_i)$ 可得 $g(x)=h(x)$. 于是

$$(g(x)+1)(g(x)-1)=f(x)-1=(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_n)^2. \tag{1}$$

因为 $g(a_i)+1=2>0$, 所以 a_i 是 $g(x)-1$ 的根. 这样， $g(x)-1=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$. 所以 a_i 是式 (1) 左边的单根，又是 (1) 右边的 2 重根，矛盾. □

例 15 设 $f(x)\in\mathbb{R}[x]$, 且对于任意的 $r\in\mathbb{R}$, 有 $f(r)\geq 0$, 求证存在 $\varphi(x),\psi(x)\in\mathbb{R}[x]$, 使得 $f(x)=\varphi(x)^2+\psi(x)^2$.

证明 设 $f(x)=a(x-a_1)^{d_1}(x-a_2)^{d_2}\cdots(x-a_r)^{d_r}(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}\cdots(x^2+b_tx+c_t)^{l_t}$, 这里 $x^2+b_1x+c_1$ 的判别式 $\triangle=b_1^2-4c_1<0$, 故 $x^2+b_1x+c_1>0$.

(1) $a>0$, 否则 $f(x)\to\infty$, 当 $x\to\infty$, 与 $f(x)\geq 0$ 矛盾.

(2) d_i 均为偶数. 不妨设 $d_1,d_2,\cdots,d_s$ 为奇数， $d_{s+1},\cdots,d_r$ 为偶数. 设 $a_1>a_2>\cdots>a_5$, 当 $a_1>r>a_2$ 时， $f(x)<0$, 矛盾. 所以 $s=0$, 即 d_i 均为偶数.

(3) $(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}\cdots(x^2+b_tx+c_t)^{l_t}$ 可表示为两个实系数多项式的平方和.

方法一 (用数学归纳法): $x^2+b_1x+c_1=x^2+2\cdot\frac{b_1}{2}+\frac{b_1^2}{4}+c_1-\frac{b_1^2}{4}=(x+\frac{b_1}{2})^2+(\frac{\sqrt{4c_1-b_1^2}}{2})^2$ 而 $(g(x)^2+h(x)^2)(p(x)^2+q(x)^2)=(g(x)p(x)+h(x)q(x))^2+(g(x)q(x)-h(x)p(x))^2$

方法二：显然 $x^2+b_1x+c_1$ 有共轭虚根. 设 $(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}\cdots(x^2+b_tx+c_t)^{l_t}$, 虚根为 $\alpha_1,\overline{\alpha_1},\alpha_2,\overline{\alpha_2},\cdots,\ \alpha_n,\overline{\alpha_n}$, 令 $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)=g(x)+ih(x)$, $g(x),h(x)\in\mathbb{R}[x]$, 则 $(x-\overline{\alpha_1})(x-\overline{\alpha_2})\cdots(x-\overline{\alpha_n})=g(x)-ih(x)$, 所以 $(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}\cdots(x^2+b_tx+c_t)^{l_t}=g(x)^2+h(x)^2$.

综上, 令 $\varphi(x)=\sqrt{a}(x-a_1)^{\frac{d_1}{2}}\cdots(x-a_r)^{\frac{d_r}{2}}(g(x)^2)$, $\psi(x)=\sqrt{a}(x-a_1)^{\frac{d_1}{2}}\cdots(x-a_r)^{\frac{d_r}{2}}h(x)^2$, 则 $f(x)=\varphi(x)^2+\psi(x)^2$. □

例 16 设 $f(x)\in\mathbb{R}[x]$, 证明： $f(x)$ 有虚根的充分必要条件是存在两个次数不相同得多项式 $h(x),g(x)$, 使得 $f(x)^2=g(x)^2+h(x)^2$.

证明 必要性. 上面例子之 (3) 中证明方法一，归纳可知 $\deg g(x)\neq\deg h(x)$.

充分性. 设 $d(x)=(g(x),h(x))$, $g(x)=d(x)g_1(x),h(x)=d(x)h_1(x)$. 则 $(h_1(x),g_1(x))=1$. $f(x)^2=d(x)^2(g_1(x)^2+h_1(x)^2),\deg g_1(x)\neq\deg h_1(x)$. 所以 $\deg(g_1(x)^2+h_1(x)^2)>0$. 故 $g_1(x)^2+h_1(x)^2$ 有复根 c. 若 $c\in\mathbb{R}$, 则 $g_1(c)^2+h_1(c)^2=0$, 可得 $g_1(c)=0,h_1(c)=0$ 与 $(g_1(x),h_1(x))\neq 1$ 矛盾. 所以 $c\overline{\in}\mathbb{R}$, 而 c 是 $f(x)$ 的根. □

作业： P_{211}.1, 2(1), 4(4), 7. 8. 9; P_{227}. 12.

补充 1: 用综合除法将 $f(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+1$ 改写为 $x+1$ 的多项式.

思考题： P_{211}.3, 4(1), (2), 5, 6.

选做题： $p_{207}.6.$