§5.6 复系数多项式

教学目的与要求 理解代数基本定理与 $\mathbb{C}$ 上多项式标准形，熟练掌握 Vieta 定理，了解一元三次，四次方程的根式解法以及 Galois 在根式解问题的重大贡献.

一. $\mathbb{C}$ 上标准形

定理 (**代数学基本定理**) 每个次数大于零的复数域上多项式都至少有一个复数根.

证明 设

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in \mathbb{C}[x], \quad a_n \neq 0 \tag{1}$$

首先证明，存在复数 z_0, 使 $\forall z \in \mathbb{C}$, 有 $|f(z)| \geq |f(z_0)|$. 令 $z = x + iy, a_j = b_j' + ic_j'$, 其中 x, y 为实变量， $b_j', c_j' \in \mathbb{R}$, 则

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

其中 $u(x, y), v(x, y)$ 是实系数二元多项式函数，又

$$|f(z)| = \sqrt{u(x, y)^2 + v(x, y)^2}.$$

是一个二元连续函数. 但

$$|f(z)| = |a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0| \geq |a_nz^n| - |a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0|$$

$$\geq |z^n|[|a_n| - (\frac{|a_{n-1}|}{|z|} + \frac{|a_{n-2}|}{|z^2|} + \cdots + \frac{|a_0|}{|z^n|})] \to \infty \quad (z \to \infty).$$

于是存在常数 R, 当 $|z| > R$ 时， $|f(z)|$ 充分大，因此 $|f(z)|$ 的最小值必含于圆 $|z| \leq R$ 中，但这是平面上闭区域，必存在 z_0, 使 $|f(z_0)|$ 为最小.

再者证明， $f(z_0) = 0$. 反证法，即若 $f(z_0) \neq 0$, 则必可找到 z_1, 使 $|f(z_1)| < |f(z_0)|$. 将 $z = z_0 + h$ 代入 (1), 即可得到关于 h 的 n 次多项式：

$$f(z_0 + h) = b_nh^n + b_{n-1}h^{n-1} + \cdots + b_1h + b_0.$$

当 $h=0$ 时， $b_0=f(z_0)$, 由假定 $f(z_0)\neq 0$, 故

$$\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)}=\frac{b_n}{f(z_0)}h^n+\frac{b_{n-1}}{f(z_0)}h^{n-1}+\cdots+\frac{b_1}{f(z_0)}h+1,$$

$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 中有些可能为 0, 但不全为 0. 设 b_k 是第一个不为 0 的复数，则

$$\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)}=1+c_kh^k+c_{k+1}h^{k+1}+\cdots+c_nh^n \tag{2}$$

其中 $c_j=\frac{b_j}{f(z_0)}$, 令 $d=\sqrt[k]{-\frac{1}{c_k}}$, $h=ed$, 代入 (2) 式，即得

$$\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)}=1-e^k+e^{k+1}(c_{k+1}d^{k+1}+\cdots+c_nd^ne^{n-k-1}).$$

取充分小的 e(至少小于 1), 使

$$e(|c_{k+1}d^{k+1}|+|c_{k+1}d^{k+2}|+\cdots+|c_nd^n|)<\frac{1}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned}|\frac{f(z_0+h}{f(z_0)}| &\leq |1-e^k|+|e^{k+1}(c_{k+1}d^{k+1}+...+c_nd^n)\\ &\leq 1-e^k+e^{k+1}(|c_{k+1}d^{k+1}|+\cdots+|c_nd^n|)\\ &< 1-e^k+\frac{1}{2}e^k=1-\frac{1}{2}e^k<1\end{aligned}$$

将这样 e 代入 $h=ed$, 得到 $f(z_0+ed)<|f(z_0)|$. 矛盾. □

推论 $\mathbb{C}$ 上一元 n 次多项式在 $\mathbb{C}$ 中均有 n 个复根 (包括重根).

推论 $\mathbb{C}[x]$ 上不可约多项式是一次多项式.

这样，我们得到 $\mathbb{C}[x]$ 上一元多项式标准形

$$f(x)=c(x-a_1)^{e_1}(x-a_2)^{e_2}\cdots(x-a_m)^{e_m},$$

其中 $e_1+e_2+\cdots+e_m=n=\mathrm{def}f(x)$.

二. Vieta 定理

Vieta **定理** 若在数域 K 上多项式

$$f(x)=x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_{n-1}x+p_n,$$

在 K 中有 n 个根 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = -p_1,$$
$$\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j = p_2,$$
$$\sum_{1\le i<j<k\le n} x_i x_j x_k = -p_3,$$
$$\cdots$$
$$x_1 x_2 \cdots x_n = (-1)^n p^n.$$

证明 令 $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$, 展开比较系数即得. □

三. 一元三次方程的求根公式

设 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, 作变换 $x = y - \frac{1}{3}a$, 代入上式得到

$$y^3 + py + q = 0.$$

问题即求 $f(x) = x^3 + px + q = 0$ 的根.

若 $q = 0$, 则 $x_1 = 0, x_2, x_3 = \pm(\sqrt{-p})$.

若 $p = 0$, 则 $x_1 = \sqrt[3]{-q}, x_2 = \sqrt[3]{-q}\omega, x_3 = \sqrt[3]{-q}\omega^2, \quad \omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ p \neq 0,\ q \neq 0.$

令 $x = u + v$, 则 $x^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = u^3 + v^3 + 3uvx$

或 $x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0$.

比较，得：

$$\begin{cases} uv = -\frac{1}{3} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} u^3 v^3 = -\frac{1}{27}p^3 \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$$

由 Vieta 定理知 u^3, v^3 是方程

$$y^2 + qy - \frac{p^3}{27} = 0$$

的两个根，于是

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

令 $\triangle=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$,

$$u=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\triangle}},\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\triangle}\omega},\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\triangle}\omega^2}$$

$$v=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\triangle}},\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\triangle}\omega},\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\triangle}\omega^2}$$

而 $(\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\triangle}})(\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\triangle}})=-\frac{1}{3}p$. 所以

$$\begin{cases} x_1=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\triangle}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\triangle}} \\ x_2=\omega\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\triangle}}+\omega^2\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\triangle}} \\ x_3=\omega^2\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\triangle}}+\omega\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\triangle}} \end{cases}$$

称为 Cardan 公式.

例 1 求 $f(x)=x^3+2x^2+3x+4$ 在 $\mathbb{C}$ 上的根.

解 令 $x=y-\frac{2}{3}$, 得

$$y^3+\frac{5}{3}y+\frac{70}{27}=0,\quad p=\frac{5}{3},q=\frac{70}{27},$$

则 $\triangle=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\frac{1350}{27^2}$, $\quad\sqrt{\triangle}=\frac{15}{27}\sqrt{6}=\frac{5}{9}\sqrt{6}$,

所以 $x_1=\frac{1}{3}(\sqrt[3]{15\sqrt{6}-35}+\sqrt[3]{-15\sqrt{6}-35})-\frac{2}{3}$, $x_2=\frac{\omega}{3}\sqrt[3]{15\sqrt{6}-35}+\frac{\omega^2}{3}\sqrt[3]{-15\sqrt{6}-35}-\frac{2}{3}$, $x_3=\frac{\omega^2}{3}\sqrt[3]{15\sqrt{6}-35}+\frac{\omega}{3}\sqrt[3]{-15\sqrt{6}-35}-\frac{2}{3}$.

四. 一元四次方程的根式分解 (Ferrari 解法)

考虑 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$

令 $x=y-\frac{1}{4}a$, 归纳为

$$x^4+ax^2+bx+c=0 \tag{3}$$

变形得

$$x^4+ux^2+\frac{u^2}{4}-[(u-a)x^2-bx+\frac{u^2}{4}-c]=0 \tag{4}$$

$$x^4+ux^2+\frac{u^2}{4}=(x^2+\frac{u}{2})^2.$$

$[(u-a)x^2-bx+\frac{u^2}{4}-c]$ 是一个完全平方的充分条件是

$$b^2-4(u-a)(\frac{u^2}{4}-c)=0$$

这是 u 的三次方程，称为 (3) 的分解式. 假定 u 已解出，则 (4) 变为

$$(x^2+\frac{u}{2})^2-(\sqrt{u-a}x-\frac{b}{2\sqrt{u-a}})^2=0$$

分解因式后得

$$x^2+\sqrt{u-a}x+\frac{u}{2}-\frac{b}{2\sqrt{u-a}}=0. \tag{5}$$

$$x^2-\sqrt{u-a}x+\frac{u}{2}+\frac{b}{2\sqrt{u-a}}=0. \tag{6}$$

这样就可求得所有根.

注 分解式中只要取一个根即可. 表面看分解式有 3 个根，代入 (5) 式 (6) 式，有 12 个根. 事实上 (5) 乘以 (6) 是 (3) 式，只有 4 个根！

例 2 求 $f(x)=x^4+x^2+4x-3$ 的根.

解 考虑预解式 $16-4(u-1)(\frac{u^2}{4}+3)=0$, 即 $u^3-u^2+12u-28=0$, 易见 $u=2$ 是根. 解 $x^2+x+1-\frac{4}{2}=0$, $x^2+x-1=0$, $x^2-x+3=0$, 得 $\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5})$, $\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{11}i)$ 是根.

例 3 将 $f(x)=x^4+4x-1$ 分解成两个实二次多项式之积.

解 $a=0,b=4,c=-1$. 考虑预解式 $16-4u(\frac{u^2}{4}+1)=0$, 即 $u^3+4u-16=0$, 可知 $u=2$ 是解. 所以

$$f(x)=(x^2+\sqrt{2}x+1-\sqrt{2})(x^2-\sqrt{2}x+1+\sqrt{2}).$$

五. 用根式解代数方程问题

大约在公元前 2000 年, 古巴比伦人就已经知道类似于配方法解一元二次方程. S.del.ferro(1465-1526) 和 N.Fontan linebreak(即 Tartoglia)(1499-1557) 给出一元三次方程的根式解. L.Ferrari(1522-1565) 给出一元四次方程的根式解. 以上解法，收入 G.Cardanno(1501-1576) 在 1545 年出版的《 Ars Magna(大术) 》中.

挑战: 找出五次方程的根式解, 1545 年来近 300 年努力, 中间应该提到 Lagrange, Gauss, P.Ruffini(1765-1822) 等名字.

1824 年挪威青年数学家 Abel 证明了一般五次方程根式解的不可能性. 但是证明有漏洞，且没有解决什么时候一个 n 次方程可用根式求解，什么时候不可能用根式求解重要问题.

1830 年，法国天才的青年数学家 Galois 借助于它创立的群的理论彻底解决了这个问题. 用域论群论语言刻画了 $f(x)$ 可用根式解的充要条件. Gralois 的工作不仅完美的解决了一元 n 次方程根式解问题，最重要的是开创了代数学的新纪元. 一门全新的并在现代数学中起极其重要的数学分支 – 抽象代数学从此诞生了.

六. Vieta 定理的应用举例

例 4 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 的 n 个根为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 且 $x_i\neq 0, 1\leq i\leq n$, 求以 $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\cdots,\frac{1}{x_n}$ 为根的多项式.

解 令 $g(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$, 则 $x_i^ng(\frac{1}{x_i})=a_0+a_1x_1+\cdots+a_ix_i^n=f(x_i)=0$. 因为 $x_i\neq 0$, 所以 $g(\frac{1}{x_i})=0$. 故有 $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\cdots\frac{1}{x_n}$ 是 $g(x)$ 的根. $g(x)$ 即为所求. □

例 5 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 x^3+px^2+qx+r 的根. 求作多项式, 使得 $\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3),\alpha_2(\alpha_1+\alpha_3),\alpha_3(\alpha_1+\alpha_2)$ 为根.

解

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-p\\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3=q\\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3=-r\end{cases}$$

设所求多项式为 $x^3+p_1x^2+q_1x+r_1$, 则 $-p_1=\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3)+\alpha_2(\alpha_1+\alpha_3)+\alpha_3(\alpha_1+\alpha_2)=2q$, $q_1=\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3)\alpha_2(\alpha_1+\alpha_3)+\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3)\alpha_3(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_2(\alpha_1+\alpha_3)\alpha_3(\alpha_1+\alpha_2)$ $=q^2-pr$, $-r_1=\alpha_1\alpha_2\alpha_3(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_1+\alpha_3)=rqp-r^2$, 故所求多项式为 $f(x)=x^3-2qx^2+(q^2-pr)x+(r^2-rpq)$.

例 6 设 $f(x)\in\mathbb{C}[x]$. 对于任意的 $c\in\mathbb{R}$, $f(c)\in\mathbb{R}$. 求证 $f(x)\in\mathbb{R}[x]$.

证明 (法一) 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, 则

$$\begin{cases}a_n1^n+a_{n-1}1^{n-1}+\cdots+a_11+a_0=b_1\\ a_n2^n+a_{n-1}2^{n-1}+\cdots+a_12+a_0=b_2\\ \cdots\cdots\\ a_n(n+1)^n+a_{n-1}(n+1)^{n-1}+\cdots+a_1(n+1)+a_0=b_{n+1}\end{cases}$$

其中 $b_i\in\mathbb{R}, 1\leq i\leq n+1$. 视 $a_0,a_1,\cdots a_n$ 为未知量，得到 $n+1$ 元一次非齐次线性方程组, 系数矩阵是 Vander Monde 行列式, 方程有唯一解且为实数, 故 $f(x)\in\mathbb{R}[x]$.

(法二) 设 $f(x)$ 为 n 次多项式，将 $f(x)$ 重新整理后表示为 $f(x)=g(x)+ih(x)$,

其中 $g(x), h(x) \in \mathbb{R}[x]$. 显然， $h(x)$ 次数小于等于 n. 由设知，对 $k=0,1,2,\cdots,n$, 都有 $f(k) \in \mathbb{R}$, 这意味着 $h(k)=0$, 因此 $h(x)=0$, 即 $f(x)$ 为实系数多项式. $\square$

作业： P_{206}. 1， 5; P_{228}.14.

补充作业：在 C 上求 $f(x)=x^3+3x+2$ 的根.

思考题： P_{206}.3， 4; P_{228}.13.

选做 1: P_{227}.8.

选做 2: 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0 \in K[x]$, a_0 为素数,且 $|a_0|>|a_1|+\cdots+a_n$, 证明 $f(x)$ 在 Z 上不可约.