§5.5 多项式函数

教学目的与要求 理解多项式可作为函数的根的性质, 理解两个多项式相等 $\Longleftrightarrow$ 作为函数相等. 了解多项式的性质与数域扩大的关系. 能应用多项式的函数性质解决相关问题.

一. 多项式函数

设 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 \in K[x]$, 定义 $f(x) : K \to K$, $b \mapsto f(b) := a_nb^n + a_{n-1}b^{n-1} + ... + a_1b + a_o$, 则 $f(x)$ 是 K 上一个函数.

设 $f(x), g(x) \in K[x]$, 则 $f(x) = g(x)$ 作为多项式相等的定义是它们的次数相同并且对应系数相同. $f(x) = g(x)$ 作为多项式函数相等的定义是对于任意 $b \in K$, 有 $f(b) = g(b)$. 显然, $f(x) = g(x)$ 作为多项式相等，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 作为函数必定相等. 反之如何？

二. 多项式的根

定义 设 $f(x) \in K[x], b \in K$, 满足 $f(b) = 0$, 称 b 是 $f(x)$ 的一个根.

余数定理 设 $f(x) \in K$, $b \in K$, 则存在 $g(x) \in K[x]$, 使得

$$f(x) = (x - b)g(x) + f(b).$$

证明 由带余除法，有 $f(x) = (x - b)g(x) + r$. 令 $x = b$, 得到 $r = f(b)$. $\square$

定理 设 $f(x) \in K[x], \mathrm{deg}f(x) = n > 0$, 则 $f(x)$ 在 K 内至多有 n 个不同的根.

证明 设 $b_1, b_2, \cdots, b_r$ 是 $f(x)$ 在 K 上 r 个不同根，令

$$g(x) = (x - b_1)(x - b_2)...(x - b_r),$$

因为 b_i 是 $f(x)$ 的根，由余数定理知 $(x - b_i)|f(x)$. 因为 b_i 两两不同，故 $(x - b_i)$ 两两互素，这样 $g(x)|f(x)$. 所以 $r = \mathrm{deg}g(x) < \mathrm{deg}f(x) = n$. $\square$

推论 1 设 $f(x), g(x) \in K[x], \mathrm{deg}f(x), \mathrm{deg}g(x) \leq n$, 存在 K 上 $n+1$ 个不同数 $b_1, b_2, ..., b_{n+1}$, 使 $f(b_i) = g(b_i), 1 \leq i \leq n+1$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 多项式相等.

证明 令 $h(x)=f(x)-g(x), \deg h(x)\leq n$ 但 $h(x)$ 有 $n+1$ 个不同根, 故 $h(x)=0$, 即 $f(x)=g(x)$. $\square$

推论 2 设 $f(x),g(x)\in K[x]$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 作为多项式相等的充分必要条件是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 作为函数相等.

注 多项式的根与数域有关. 例: $f(x)=x^2+1$ 在 $\mathbb{R}[x]$ 没有根, 在 $\mathbb{C}[x]$ 有根 $\pm i$.

例 1 $\sin x$ 不是 $\mathbb{R}[x]$ 上多项式.

证明 $\sin x$ 在 $\mathbb{R}[x]$ 上有无穷多个根. $\square$

三. 重根

设 $f(x)\in K[x], b\in K$, 若 $(x-b)^k|f(x)$, 但 $(x-b)^{k+1}\nmid f(x)$, 则称 b 是 $f(x)$ 的 k 重根. 当 $k=1$ 时, 称 b 为 $f(x)$ 的单根.

z **注** 有重根必有重因式, 反之未必. 例如 $f(x)=x(x^2+x+1)^2, (x^2+x+1)^2|f(x)$, 但在 $\mathbb{R}[x]$ 中考虑, $f(x)$ 无重根.

命题 设 $f(x)\in K[x], \deg f(x)=n$, 则 $f(x)$ 在 K 中至多 n 个根, 其中将 k 重根看作 k 个根.

例 2 设 b 是 $f(x)$ 的 k 重根 $(k>1)$, 则 b 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重根. 反之不然. 例 $f(x)=(x-1)(x-2), f'(x)=2x-3, \frac{3}{2}$ 是 $f(x)$ 的 k 单根, 但不是 $f(x)$ 的 2 重根.

例 3 设 b 是 $(f(x),f'(x))$ 的 $k-1$ 重根, 则 b 是 $f(x)$ 的 k 重根.

证明: 依题意, 可设 $d(x)=(f(x),f'(x))=(x-b)^{k-1}h_1(x)$. 则 $f(x)=d(x)f_1(x)$, 因此 $x-b|f_1(x)$. 设 $f_1(x)=(x-b)h_2(x)$, 故 $f(x)=(x-b)^k h_1(x)h_2(x)$. $x-b\nmid h_1(x)h_2(x)$. 命题得证. $\square$

四. 多项式的性质和数域扩大的关系

多项式的整除, 带余除法, 最大公因式, 互素与数域扩大无关.

例 4 设 K,F 是两个数域且 $K\subseteq F$, 设 $f(x),g(x)\in F[x]$, 自然 $f(x),g(x)\in F[x]$.
(1) 在 $K[x]$ 上 $g(x)|f(x)$ 的充分必要条件是在 $F[X]$ 上 $g(x)|f(x)$;
(2) 在 $K[x]$ 上 $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$ 的充分必要条件是在 $F[x]$ 上 $f(x)=$

$g(x)q(x)+r(x)$;

(3) 在 $F[x]$ 上 $(f(x),g(x))=d(x)$ 的充分必要条件是在 $F[x]$ 上 $(f(x),g(x))=d(x)$;

(4) 在 $F[x]$ 上 $(f(x),g(x))=1$ 的充分必要条件是在 $F[x]$ 上 $(f(x),g(x))=1$.

证明： (2) 必要性是自然的. 充分性由 $q(x)$ 与 $r(x)$ 的唯一性可得. 事实上, 设在 $F[x]$ 上, $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$,$q(x),r(x)\in F[x]$, 在 $F[x]$ 上, $f(x)=g(x)q_1(x)+r_1(x)$, $q_1(x),r_1(x)\in K[x]\subseteq F[x]$, 在 $F[x]$ 上看，由于唯一性，得到 $q(x)=q_1(x),r(x)=r_1(x)$.

(1) 因为 $g(x)|f(x)\Longleftrightarrow r(x)=0$ 由 (2) 即得.

(3) 因最大公因式是由整除性质定义.

(4) 由 (3) 即得.

多项式的根，重根，不可约性质，标准形与数域扩大有关.

例 5 $f(x)=x^2+1\in\mathbb{R}[x]$, 无根，不可约，在 $\mathbb{C}[x]$ 上， $f(x)=(x+i)(x-i)$.

例 6 设 $f(x),p(x)\in K[x]$, 且 $p(x)$ 不可约多项式. 若 $p(x),f(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有公共根 α, 则 $p(x)|f(x)$.

证明 因为 $p(x)$ 是不可约多项式，所以或 $(f(x),p(x))=1$ 或 $p(x)|f(x)$. 假设 $(p(x),f(x))=1$, 则存在 $u(x),v(x)$, 使得 $u(x)f(x)+v(x)p(x)=1$. 令 $x=\alpha$, 则 $0=u(\alpha)f(\alpha)+v(\alpha)g(\alpha)=1$, 矛盾. 所以 $p(x)|f(x)$. □

注 整除性质与数域扩大无关，根的性质与数域扩大有关. 此题目给出从数域扩大有关的根的性质，来验证与数域扩大无关的整除性质. 下面例子可见此题重要性.

例 7 设 $f(x)=x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$, 其中 m,n,p 为自然数, 又 $g(x)=x^2+x+1$, 求证： $g(x)|f(x)$.

证法 1 对 $k>0,x^3-1|x^{3k}-1$, 所以 $f(x)=(x^{3m}-1)+x(x^{3n}-1)+x^2(x^{3p}-1)+(x^2+x+1)$. 因为 $g(x)|x^3-1$, $x^3-1|(x^{3m}-1)+x(x^{3n}-1)+x^2(x^{3p}-1)$. 所以 $g(x)|f(x)$.

证法 2 $g(x)=(x-\omega_1)(x-\omega_2)$, $\omega_j=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$, $\omega_j^3=1$, $f(\omega_j)=\omega_j^{3m}+\omega_j^{3n+1}+$

$\omega_j^{3p+2} = 1+\omega_j+\omega_j^2 = g(\omega_j) = 0$, 所以 ω_j 是 $f(x), g(x)$ 的公共根. 故有 $(x-\omega_j)|f(x)$. 因为 $((x-\omega_1),(x-\omega_2)) = 1$, 所以 $g(x)|f(x)$. □

例 8 设 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, 若 $a+bi, a, b \in \mathbb{Q}, b \neq 0$, 是 $f(x)$ 的根, 则 $a-bi$ 也是 $f(x)$ 的根.

证明 设 $p(x) = (x-(a+bi))(x-(a-bi)) = x^2-2ax+(a^2+b^2) \in \mathbb{Q}[x]$, $p(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 上不可约, 因为 $p(x)$ 与 $f(x)$ 在 $\mathbb{C}[x]$ 上有公共根 $a+bi$, 由上例题知 $p(x)|f(x)$. 所以 $(x-(a-b_i))|f(x)$, 即 $a-b_i$ 是 $f(x)$ 的根. □

例 9 设 $0 \neq f(x)$ 且 $f(x)|f(x^m)$, 求证: $f(x)$ 的根只能是 0 或 1 的某个方根.

证明 在 $\mathbb{C}[x]$ 上考虑 $f(x)$. 设 α 是 $f(x)$ 的根, 即 $f(\alpha) = 0$. 因为 $f(x)|f(x^m)$, 所以 $f(\alpha^m) = 0$, 即 α^m 也是 $f(x)$ 的根, 同理可知 $\alpha^{m^2}, \alpha^{m^3}, \ldots$ 都是 $f(x)$ 的根. 这样, 必有 $\alpha^{m^l} = \alpha^{m^k}$. 若 $\alpha \neq 0$, 则 $\alpha^{m^{l-k}} = 1$, 即 α 是 1 的某个方根. □

作业: $P_{201}.1$, 2, 3; 5; $P_{227}.11$
选做: $P_{201}.6$; $P_{227}.8$