§5.4 因式分解

教学目的与要求 熟练掌握不可约因式的基本性质，掌握基本分解定理的存在性与唯一性的证明方法，熟练利用标准分解式解决相关问题，理解重因式的概念与判定方法.

一. 不可约多项式

定义 设 $f(x) \in K[x], \deg f(x) > 0$. 若 $f(x) = g(x)h(x)$, 其中 $\deg g(x), \deg h(x) < \deg f(x)$, 则称 $f(x)$ 在 K 上可约. 否则称 $f(x)$ 为不可约多项式.

注 1 $f(x) \in K[x]$, 对于 $0 \neq c \in K$, $f(x) = c(c^{-1}f(x))$. 所以，若 $p(x)$ 不可约，其因子只有 $cp(x)$ 或 c.

注 2 多项式的不可约与数域有关. x^2+1 在 $\mathbb{R}[x]$ 上不可约，在 $\mathbb{C}[x]$ 可约；设 K_1, K_2 是数域且 $K_2 \subseteq K_1$, $p(x) \in K_2[x]$ 且 $p(x)$ 在 $K_1[x]$ 上不可约，则 $p(x)$ 在 $K_2[x]$ 也不可约.

注 3

$$\text{多项式}\begin{cases} \text{可约多项式} & \deg g(x) > 0 \\ \text{不可约多项式} & \deg g(x) > 0 \\ \text{非零常数多项式} & \deg\ g(x) = 0 \\ 0 & \deg\ g(x) = -\infty \end{cases}$$

不可约多项式有下面性质.

性质 1 设 $f(x), p(x) \in K[X]$ 且 $p(x)$ 是不可约多项式，则或 $p(x)|f(x)$ 或 $((p(x), f(x)) = 1$.

证明 设 $(p(x), f(x)) = d(x)$, 则 $d(x)|p(x)$. 所以 $d(x) = 1$ 或 $d(x) = cp(x)$, 这里 c^{-1} 为 $p(x)$ 的首项系数. 若 $d(x) = cp(x)$, 则 $p(x)|f(x)$. □

性质 2 设 $p(x), f(x), g(x) \in K[X], p(x)$ 不可约多项式，且 $p(x)|f(x)g(x)$, 则或 $p(x)|f(x)$ 或 $p(x)|g(x)$.

证明 若 $p(x) \nmid f(x)$, 由性质 1, $(p(x), f(x)) = 1$. 又 $p(x)|f(x)g(x)$, 由互素多项式的性质知 $p(x)|g(x)$. □

注 设 $\deg p(x) > 0$, 则性质的逆命题也成立.

性质 1 的逆命题 $\deg p(x) > 0$, 如果对于任意的 $f(x) \in K[X]$, 或 $p(x)|f(x)$ 或 $(p(x), f(x)) = 1$. 则 $p(x)$ 为不可约多项式.

证明 反证法. 假设 $p(x) = h(x)l(x), \deg h(x), \deg l(x) < \deg p(x)$, 则对 $f(x) = h(x), p(x) \nmid f(x)$ 且 $(p(x), f(x)) = f(x) \neq 1$. 矛盾. □

性质 2 的逆命题 $\deg p(x) > 0$, 如果对于任意的 $f(x), g(x) \in K[x]$, 由 $p(x)|f(x)g(x)$, 则或 $p(x)|f(x)$ 或 $p(x)|g(x)$. 那么 $p(x)$ 为不可约多项式.

证明 反证法. 假设 $p(x) = h(x)l(x), \deg h(x), \deg l(x) < \deg p(x)$, 则令 $f(x) = h(x), g(x) = l(x), p(x)|f(x)g(x)$, 但 $p(x) \nmid f(x)$ 且 $p(x) \nmid g(x)$. 矛盾. □

二. 因式分解基本定理

定理 设 $f(x) \in K[x]$, $\deg f(x) \geq 1$, 则

(1) $f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)$, 其中 $p_i(x), 1 \leq i \leq s$ 为 K 上不可约多项式;

(2) 若 $f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x) = q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x)$, 其中 $p_i(x), q_j(x), 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t$, 为 K 上不可约多项式，则 $s = t$, 且经过适当调换因式的顺序之后有 $p_i(x) \sim q_i(x)$, $1 \leq i \leq s$.

证明 (1) 对 $\deg f(x)$ 作数学归纳法. 当 $\deg f(x) = 1$ 时，结论显然成立. 设次数小于 n 的多项式，命题成立. 现证 $\deg f(x) = n$ 的情形. 若 $f(x)$ 不可约，结论显然成立. 若 $f(x)$ 可约，则

$$f(x) = f_1(x)f_2(x).$$

$\deg f_i(x) < n, 1 \leq i \leq 2$. 由归纳假设 $f_1(x), f_2(x)$ 都可表示为不可约因式的乘积，它们之积就是 $f(x)$.

(2) 对 s 作归纳. 若 $s = 1$, 则 $f(x) = p_1(x)$, 即 $f(x)$ 不可约. 所以 $t = 1, q_1(x) = p_1(x)$. 假设对不可约多项式个数小于 s 的多项式结论成立. 则有

$$p_1(x)|q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x),$$

则必存在某个 $j, 1 \leq j \leq t$, 不妨设为 $j = 1$, 使得 $p_1(x)|q_1(x)$. 因为 $p_1(x), q_1(x)$ 均为不可约，故 $p_1(x) \sim q_1(x)$, 即

$$p_1(x) = cq_1(x).$$

因此 $p_2(x)\cdots p_s(x)=c^{-1}q_2(x)\cdots q_t(x)$. 左式为 $s-1$ 个不可约因式之积，由归纳假设 $s-1=t-1$, 即 $s-t$, 且 $p_i(x)\sim q_i(x)$. $\square$

根据定理，我们知道对于任意次数大于 1 的多项式有如下的标准分解式：

$$f(x)=cp_1^{e_1}(x)p_2^{e_2}(x)\cdots p_m^{e_m}(x),$$

其中 $p_i(x)$ 是首项系数为 1 的两两互素的不可约多项式， $e_i\geq 1, 1\leq i\leq m$.

例 1 $f(x)=cp_1^{a_1}(x)p_2^{a_2}(x)\cdots p_m^{a_m}(x)$, $g(x)=dp_1^{b_1}(x)p_2^{b_2}(x)\cdots p_m^{b_m}(x)$, $p_i(x)$ 为首一两两互素的不可约多项式， $a_i\geq 0, b_i\geq 0$ 且 $a_i+b_i>0, 1\leq i\leq m$, 则

(1) $f(x)|g(x)$ 的充分必要条件是 $a_i\leq b_i, 1\leq i\leq m$;

(2) $(f(x),g(x))=p_1^{c_1}(x)p_2^{c_2}(x)\cdots p_m^{c_m}(x), c_i=\min\{a_i,b_i\}, 1\leq i\leq m$;

(3) $[f(x),g(x)]=p_1^{d_1}(x)p_2^{d_2}(x)\cdots p_m^{d_m}(x), d_i=\max\{a_i,b_i\}, 1\leq i\leq m$;

(4) $(f(x),g(x))[f(x),g(x)]=c^{-1}d^{-1}f(x)g(x)$.

三. 重因式

定义 设 $f(x),p(x)\in K[x]$, $p(x)$ 是不可约多项式, 若存在 $k>1$ 使得 $p^k(x)|f(x)$, $p^{k+1}(x)\nmid f(x)$, 则称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k- 重因式.

定理 (1) 不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k- 重因式，则 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式；

(2) $\frac{f(x)}{(f(x),f'(x))}$ 没有重因式，且它的不可约因式与 $f(x)$ 的不可约因式相同；

(3) $f(x)$ 没有重因式的充分必要条件是 $(f(x),f'(x))=1$.

证明 (1) 由设 $f(x)=p^k(x)h(x)$, 其中 $p(x)\nmid h(x)$. 直接计算得， $f'(x)=kp^{k-1}(x)p'(x)h(x)+p^k(x)h'(x)$. 显然，$p^{k-1}(x)|f'(x)$, 但 $p(x)\nmid kp'(x)h(x)+p(x)h'(x)$, 否则有 $p(x)\mid p'(x)h(x)$, 而 $p(x)$ 不可约， $p(x)\nmid h(x)$, 从而 $p(x)\mid p'(x)$, 这是不可能的，因 $p'(x)$ 非零且次数小于 $p(x)$ 的次数.

(2) 设 $f(x)$ 的标准分解式为 $f(x)=cp_1^{e_1}(x)p_2^{e_2}(x)\cdots p_s^{e_s}(x)$, 只要证 $\frac{f(x)}{d(x)}=cp_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)$ 命题即得证. 事实上，$f'(x)=ce_1p_1^{e_1-1}(x)p_2^{e_2}(x)\cdots p_s^{e_s}(x)p_1'(x)+ce_2p_1^{e_1}(x)p_2^{e_2-1}(x)\cdots p_s^{e_s}(x)p_2'(x)+\cdots+ce_sp_1^{e_1}(x)p_2^{e_2}(x)\cdots p_s^{e_s-1}(x)p_s'(x)$. 所以 $p_1^{e_1-1}(x)p_2^{e_2-1}(x)\cdots p_s^{e_s-1}(x)$ 是 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的公因式. 注意到 $p_1^{e_1}(x)$ 可整除右项中除第一项外的所有各项，但不能整除第一项，故 $p_1^{e_1}(x)\nmid f'(x)$. 同理 $p_i^{e_i}(x)\nmid f'(x)$. $d(x)=(f(x),f'(x))=p_1^{e_1-1}(x)p_2^{e_2-1}(x)\cdots p_s^{e_s-1}(x)$, $\frac{f(x)}{d(x)}=cp_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)$.

(3) 由 (2) 即得结论. $\square$

例 2 设 $f(x), g(x)$ 是 K 上的两个非零多项式, 证明存在整数 N 使得对任意的 $n_1, n_2 > N$, 总有 $(f^{n_1}(x), g(x)) = (f^{n_2}(x), g(x))$.

证明 若 $(f(x), g(x)) = 1$, 取 $N = 1$. 若 $(f(x), g(x)) = d(x) \neq 1$, 设 $d(x)$ 的标准分解式是 $d(x) = p_1^{e_1}(x)p_2^{e_2}(x)\cdots p_m^{e_m}(x)$, 其中 $p_i(x)$ 是 K 上两两互素的首一不可约多项式, $e_i > 0, 1 \leq i \leq m$. 相应的, 设 $f(x) = p_1^{a_1}(x)p_2^{a_2}(x)\cdots p_m^{a_m}(x)f_1(x)$, $g(x) = p_1^{b_1}(x)p_2^{b_2}(x)\cdots p_m^{b_m}(x)g_1(x)$, 其中 $a_i > 0, b_i > 0, 1 \leq i \leq m$. 取 $N = \max_{i=1}^{m} \frac{b_i}{a_i}$, 则对任意的 $n_1, n_2 > N$, 总有 $(f^{n_1}(x), g(x)) = (f^{n_2}(x), g(x)) = p_1^{b_1}(x)p_2^{b_2}(x)\cdots p_m^{b_m}(x)$. $\square$

例 3 设 $f(x), g(x) \in K[x]$. 证明 $(f(x), g(x)) \neq 1$ 的充要条件是存在 K 上不可约多项式 $p(x)$, 使得 $p(x)|f(x)+g(x)$, $p(x)|f(x)g(x)$.

证明 必要性. 设 $d(x) = (f(x), g(x))$. 由已知 $d(x) \neq 1$, 可取到 $d(x)$ 的不可约因式 $p(x)$, 容易验证 $p(x)|f(x)+g(x)$, $p(x)|f(x)g(x)$.

充分性. 因 $p(x)|f(x)+g(x)$, 所以 $p(x)|f(x)g(x)+g^2(x)$. 又因 $p(x)|f(x)g(x)$, 从而 $p(x)|g^2(x)$. 注意到 $p(x)$ 是 K 上不可约多项式, 故 $p(x)|g(x)$. 再由 $p(x)|f(x)+g(x)$, 即有 $p(x)|f(x)$. 这说明 $p(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的一个公因式, 故 $(f(x), g(x)) \neq 1$. $\square$

例 4 设 $f(x) \in K[x]$, $a \in K$. 令 $y = x - a$, 得 $g(y) = f(y+a)$. 证明 $f(x)$ 在 K 上可约的充要条件是 $g(y)$ 在 K 上可约.

证明 必要性. 设 $f(x)$ 次数为 n. 因 $f(x)$ 在 K 上可约, 故存在 K 上次数小于 n 的多项式 $u(x), v(x)$, 使得 $f(x) = u(x)v(x)$, 把 x 用 $y+a$ 替换, 得 $g(y) = s(y)t(y)$, 其中 $s(y) = u(y+a)$, $t(y) = v(y+a)$. 设 $f(x)$ 的首项为 a_nx^n, 简单计算知 $g(y)$ 的首项是 a_ny^n, 这说明 $\deg g(y) = \deg f(x) = n$. 同理可得 $\deg s(y) = \deg u(x) < n$, $\deg t(y) = \deg v(x) < n$. 这就证明了 $g(y)$ 在 K 上也可约.

充分性类似可得. $\square$

作业: P_{198}. 1 (1), 2, 4, 6; P_{227}. 3

补充 1: 求证 $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ 无重因式.

补充 2: 求 $x^3 + px + q$ 有重因式的条件.

补充 3: 若 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 在 K 上可约, 其中 $a_n a_0 \neq 0$. 证明 $g(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ 在 K 上也可约.

思考：若不可约多项式 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式，且 $p(x)|f(x)$. 问 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式么？为什么？

选做: 设 $f(x), g(x)$ 是 K 上全不为零的多项式. 若 $f(x)g(x)+f(x)+g(x) = p(x)$ 是首一的不可约多项式，则 $(f(x), g(x)) = 1$.