§5.2 整除

教学目的和要求 掌握带余除法的内容和证明方法．熟练用带余除法，待定系数法，凑项法解答整除的有关问题．

定义 设 $f(x), g(x) \in K[x]$, 若存在 $h(x) \in K[x]$, 使得 $f(x) = g(x)h(x)$, 则称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的因式，或 $g(x)$ 可以整除 $f(x)$, 或 $f(x)$ 可被 $g(x)$ 整除，记为 $g(x)|f(x)$. 否则称 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$, 记为 $g(x) \nmid f(x)$.

注 设 $0 \neq f(x) \in K[x], 0 \neq c \in K$, 则

(1) $cf(x)|f(x)$;

(2) $c|f(x)$;

(3) $f(x)|f(x)$;

(4) $f(x)|0$, 但 $0 \nmid f(x)$;

(5) $0|0$.

问 2 整除 1 否？

整除的性质

(1) $f(x)|g(x)$, 则对任意 $0 \neq c \in K$, 都有 $cf(x)|g(x)$;

(2) $f(x)|g(x), g(x)|f(x)$, 则存在 $0 \neq c \in K$, 使得 $f(x) = cg(x)$;

(3) $f(x)|g(x), g(x)|h(x)$, 则 $f(x)|h(x)$;

(4) $f(x)|g(x), f(x)|h(x)$, 则对任意 $u(x), v(x) \in K[x]$, 都有 $f(x)|g(x)u(x) + h(x)v(x)$.

证明 根据定义．$\square$

称适合性质 (2) 的两多项式 $f(x), g(x)$ 为相伴多项式，记为 $f(x) \sim g(x)$.

带余除法定理 设 $f(x), g(x) \in K[x]$, 且 $g(x) \neq 0$, 则存在唯一 $q(x), r(x) \in K[x]$, 使得 $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, 这里 $\deg r(x) < \deg g(x)$.

证明 当 $f(x) = 0$ 或 $\deg f(x) < \deg g(x)$ 时，令 $q(x) = 0, r(x) = f(x)$ 即可．

设 $\deg f(x) \geq \deg g(x)$, 对 $\deg f(x)$ 作数学归纳法．

若 $\deg f(x)=0$, 则 $\deg g(x)=0$, 可设 $f(x)=a_0, g(x)=b_0$, 令 $q(x)=a_0b_0^{-1}, r(x)=0$ 即可.

作为归纳假设，我们设结论对于小于 n 次的多项式均成立. 现在考虑 n 次多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$. 设 $g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0$, 由于 $n\geq m$, 令 $f_1(x)=f(x)-a_nb_m^{-1}x^{n-m}g(x)$, 则 $\deg f_1(x)<n$. 若 $\deg f_1(x)<\deg g(x)$, 令 $q(x)=0, r(x)=f(x)$. 若 $\deg f_1(x)\geq \deg g(x)$ 由归纳假设，有 $f_1(x)=q_1(x)g(x)+r(x), \deg r(x)<\deg g(x)$, 所以 $f(x)=f_1(x)+a_nb_m^{-1}x^{n-m}g(x)=(q_1(x)+a_nb_m^{-1}x^{n-m})g(x)+r(x)$. 令 $q(x)=q_1(x)+a_nb_m^{-1}x^{n-m}$, 存在性即证.

再证唯一性. 设 $f(x)=g(x)p(x)+r(x), \deg r(x)<\deg g(x)$, $f(x)=g(x)q(x)+s(x), \deg s(x)<\deg g(x)$, 则 $g(x)(p(x)-q(x))=s(x)-r(x)$. 若 $p(x)\neq q(x)$, 则 $\deg(g(x)(p(x)-q(x)))\geq \deg g(x)>\deg(s(x)-r(x))$, 矛盾. 所以 $p(x)=q(x)$, 进而 $s(x)=r(x)$. □

注 1 带余除法式子 $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$ 中， $q(x)$ 称为商式， $r(x)$ 称为余式.

注 2 带余除法中 $\deg r(x)<\deg g(x)$ 是重要的，否则不保证唯一性. 如 $f(x)=x^2+1, g(x)=x+1$, 则 $f(x)=g(x)(x-1)+2=g(x)(x+1)-2x$.

注 3 带余除法与数域扩大无关. 事实上，设 K,F 是两数域，且 $K\subset F$, $f(x),g(x)\in K[x]$, $g(x)\neq 0$. 因此 $f(x),g(x)\in F[x]$. 在 F 上用带余除法，存在 $q_F(x),r_F(x)\in F[x]$, 使得 $f(x)=g(x)q_F(x)+r_F(x)$, 这里 $\deg r_F(x)<\deg g(x)$. 另一方面, 在 K 上用带余除法, 存在 $q_K(x),r_K(x)\in K[x]$, 使得 $f(x)=g(x)q_K(x)+r_K(x)$, 这里 $\deg r_F(x)<\deg g(x)$. 显然， $q_K(x),r_K(x)\in F[x]$, 因此上式在 F 上成立. 由 (F 上) 带余除法的唯一性，即得 $q_K(x)=q_F(x), r_K(x)=r_F(x)$.

推论 设 $f(x),g(x)\in K[x]$, $g(x)\neq 0$, 则 $g(x)|f(x)$ 的充分必要条件是 $g(x)$ 除 $f(x)$ 后的余式为 0.

注 整除与数域扩大无关.

例 1 证明 $x|f(x)$ 的充要条件是 $x^2|f(x)^2$.

证明: 必要性. 因 $x|f(x)$, 故 $f(x)=xq(x)$, 进而 $f(x)^2=x^2q(x)^2$.

充分性. 反证法. 若不然，由带余除法，设 $f(x)=xq(x)+r$, 其中 r 为非零

常数．则 $f(x)^2 = x^2q(x^2) + r(2xq(x) + r)$．由设 $x^2|f(x)^2$ 得 $x^2|r(2xq(x) + r^2)$, 这是不可能的．因为 r 非零，且 $2xq(x)$ 是常数项为零的多项式，因此 $r(2xq(x) + r)$ 是常数项为 r^2 的多项式，不能被 x^2 整除．命题得证． □

例 2 设 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 5x - 1, g(x) = x^2 - x + 1$. 求 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式和余式.

解:

$$
\begin{array}{rrrrr|rrr}
3 & -4 & 0 & 5 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
3 & -3 & 3 & & & 3 & -1 & -4 \\
\hline
& -1 & -3 & 5 & -1 & & & \\
& -1 & 1 & -1 & & & & \\
\hline
& & -4 & 6 & -1 & & & \\
& & -4 & 4 & -4 & & & \\
\hline
& & & 2 & 3 & & &
\end{array}
$$

所以所求商式和余式分别是 $q(x) = 3x^2 - x - 4, r(x) = 2x + 3$.

作业： P_{187} 1，2，3，4(可用待定系数法，可用带余除法)，6;

思考题： P_{187} 5，7