第五章　多项式

§5.1 一元多项式代数

教学目的和要求 掌握一元多项式形式的准确描述；理解 $K[x]$ 对于多项式的加法，数乘，乘法构成 K- 代数；掌握用多项式的次数来解题的方法.

一. 定义

定义 设 K 是一个数域，形如

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

的式子，其中 x 为形式符号 (未定元), $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $a_i \in K, 0 \leq i \leq n$, 称为数域 K 上的一个一元多项式. 其中，$a_i x^i$ 称为多项式 $f(x)$ 的第 i 次项，a_i 称为第 i 次项系数. 特别地，当 $a_n \neq 0$ 时，称 a_n 为 $f(x)$ 的首项系数，a_0 称为 $f(x)$ 的常数项.

当 $f(x) = a_0$ 时，称 $f(x)$ 为常数项多项式. $f(x) = 0$ 称为零多项式.

例 $\sqrt{2} + x$ 是否为多项式？ $\sum_{i=0}\infty x^i = 1 + x + x^2 + ...$ 是否为多项式？ $x^{2/3}$ 是否为多项式？ $\frac{x+1}{x-1}$ 是否为多项式？

数域 K 上的一元多项式全体记为 $K[x]$.

二. 多项式运算

多项式的相等：设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0$, 称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等，记为 $f(x) = g(x)$, 如果 $m = n$, 且 $a_i = b_i$, $0 \leq i \leq n$.

多项式的加法：设 $f(x), g(x) \in K[x]$, 适当增加系数为零的项，可记 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, $g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$. 定义 $f(x) + g(x) := (a_n + b_n) x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} + ... + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$.

多项式的加法满足：对任意的 $f(x), g(x), h(x) \in K[x]$, 有

(1) 结合律： $(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$;

(2) 交换律： $f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$;

(3) 存在零元：存在 $0\in K[x]$, 使得 $f(x)+0=f(x)$;

(4) 存在负元：对任意 $f(x)$, 存在唯一 $g(x)$, 使 $f(x)+g(x)=0$.

所以 $K[x]$ 对于多项式的加法构成加群.

多项式的数乘：设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0\in K[x], c\in K$, 定义 $cf(x):=ca_nx^n+ca_{n-1}x^{n-1}+...+ca_1x+ca_0$.

多项式的数乘满足：对任意的 $f(x),g(x)\in K[x]$, $c,d\in K$, 有

(5) $c(f(x)+g(x))=cf(x)+cg(x)$;

(6) $(c+d)f(x)=cf(x)+df(x)$;

(7) $(cd)f(x)=c(df(x))$;

(8) $1f(x)=f(x)$.

所以 $K[x]$ 对于多项式的加法和数乘构成 K- 线性空间.

多项式的乘法：设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, $g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0\in K[x]$, 定义 $f(x)g(x)=c_{m+n}x^{m+n}+c_{m+n-1}x^{m+n-1}+...+c_1x+c_0$, 其中 $c_k=\sum_{i+j=k}a_ib_j=a_0b_k+a_1b_{k-1}+...+a_kb_0, 0\le k\le m+n$.

多项式乘法满足：对任意的 $f(x),g(x),h(x)\in K[x]$, $c\in K$, 有

(9) $(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x))$;

(10) $f(x)g(x)=g(x)f(x)$;

(11) $(f(x)+g(x))h(x)=f(x)h(x)+g(x)h(x)$;

(12) $c(f(x)g(x))=(cf(x))g(x)=f(x)(cg(x))$.

所以 $K[x]$ 对于多项式的加法，数乘，乘法构成 K- 交换代数.

三. 多项式的次数

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0\in K[x]$, $a_n\neq 0$, 则称 $f(x)$ 是 n 次多项式，记为 $\deg f(x)=n$. 定义 $\deg 0=-\infty$.

注 $f(x)=0$ 的充分必要条件是 $f(x)$ 的首项系数为 0.

引理 (1) $\deg(f(x)g(x))=\deg f(x)+\deg g(x)$;

(2) $\deg(f(x)+g(x))\le\max\{\deg f(x),\deg g(x)\}$;

(3) 当 $0 \neq c \in K$ 时， $\deg(cf(x)) = \deg f(x)$.

命题 设 $f(x), g(x) \in K[x]$, $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$, 则 $f(x)g(x) \neq 0$.

证明 考虑首项系数.

推论 设 $f(x)g(x) = f(x)h(x)$ 且 $f(x) \neq 0$, 则 $g(x) = h(x)$.

例 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$, 且 $f(x)^2 + g(x)^2 = 0$, 则 $f(x) = g(x) = 0$.

证明 反证法. 假设 $f(x) \neq 0$ 或 $g(x) \neq 0$. 记 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ $g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0$. 不妨设 $n \geq m$. 则 $f(x)^2 + g(x)^2$ 的首项系数为 $a_n^2 + b_n^2$ 或 a_n^2. 即 $f(x)^2 + g(x)^2$ 的首项系数不为 0, 与题设矛盾. $\square$

作业：设 $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{R}[x]$, $xf^2(x) + xg^2(x) = h^2(x)$, 则 $f(x) = g(x) = h(x) = 0$.

思考题：对任意非零多项式 $f(x) \in K[x]$, 证明 $\deg f(f(x)) = (\deg f(x))^2$.