第八章　欧氏空间

§8.4 内积空间的同构，正交变换

本节首先讨论欧氏空间的同构，即保持内积的线性空间的同构.

定义 8.4.1 设 V,W 是两个欧氏空间，$\varphi: V\to W$ 是线性映射，如果 φ 是线性空间同构且保持内积，即对于任意的 $\alpha,\beta\in V$, 有

$$(\varphi(\alpha),\varphi(\beta))=(\alpha,\beta),$$

则称 φ 是 **欧氏空间的同构**, 并记为 $V\cong W$.

命题 8.4.1 欧氏空间的同构关系满足 (1) 反身性，即 $V\cong V$; (2) 对称性，即若 $V\cong W$, 则 $W\cong V$; (3) 传递性，即若 $V\cong W$, $W\cong U$, 则 $V\cong U$.

定理 8.4.1 任意 n 维欧氏空间都同构于欧氏空间 $\mathbb{R}^n$.

证明 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 V 的一个标准正交基，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基，令 φ 为如下定义的线性映射 $V\to\mathbb{R}^n$: $\varphi(\xi_i)=\varepsilon_i$, $1\le i\le n$. 则显然 φ 是线性空间的同构. 并且对任意 $\alpha,\beta\in V$, $\alpha=a_1\xi_1+a_2\xi_2+\cdots+a_n\xi_n$, $\beta=b_1\xi_1+b_2\xi_2+\cdots+b_n\xi_n$, 有

$$\begin{aligned}(\varphi(\alpha),\varphi(\beta)) &= (a_1\varphi(\xi_1)+a_2\varphi(\xi_2)+\cdots+a_n\varphi(\xi_n), b_1\varphi(\xi_1)+b_2\varphi(\xi_2)+\cdots+b_n\varphi(\xi_n))\\ &= (a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n, b_1\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2+\cdots+b_n\varepsilon_n)\\ &= a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\\ &= (\alpha,\beta).\end{aligned}$$

因此 φ 是同构. □

定理 8.4.2 两个有限维欧氏空间同构的充分必要条件是它们的维数相等.

下面讨论正交变换.

定义 8.4.2 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 的线性变换，如果 φ 保持内积不变，即对于任意的 $\alpha,\beta\in V$, 有

$$(\varphi(\alpha),\varphi(\beta))=(\alpha,\beta),$$

则称 φ 是 **正交变换**.

从下面的定理看出来，欧氏空间 V 的线性变换 φ 是正交变换的充分必要条件是 φ 是 V 作为欧氏空间的自同构.

定理 8.4.3 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 的线性变换，则下列条件等价：
(1) φ 是正交变换;
(2) φ 保持长度不变，即对于任意的 $\alpha\in V$, 有 $|\varphi(\alpha)|=|\alpha|$;
(3) φ 将 V 的任意标准正交基变为另一个标准正交基;

(4) φ 在 V 的任意标准正交基下的矩阵是正交阵;

(5) φ 在 V 的某组标准正交基下的矩阵是正交阵.

证明 (1)$\Rightarrow$ (2): 对于任意的 $\alpha \in V$, 有

$$(\varphi(\alpha), \varphi(\alpha)) = (\alpha, \alpha),$$

两边开平方，得到 $|\varphi(\alpha)| = |\alpha|$.

(2)$\Rightarrow$ (1): 对于任意的 $\alpha, \beta \in V$,

$$(\varphi(\alpha), \varphi(\alpha)) = (\alpha, \alpha),$$

$$(\varphi(\beta), \varphi(\beta)) = (\beta, \beta),$$

$$(\varphi(\alpha+\beta), \varphi(\alpha+\beta)) = (\alpha+\beta, \alpha+\beta).$$

将后面等式展开，得到 $(\varphi(\alpha), \varphi(\alpha)) + (\varphi(\beta), \varphi(\beta)) + 2(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = (\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) + 2(\alpha, \beta)$. 将前两式代入，得到 $(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = (\alpha, \beta)$.

(1)$\Rightarrow$(3): 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是 V 的一个标准正交基. 则

$$(\varphi(\xi_i), \varphi(\xi_j)) = (\xi_i, \xi_j) = \delta_{ij}.$$

(3) $\Rightarrow$ (4): 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是 V 的一个标准正交基,

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)A.$$

因为 $\varphi(\xi_1), \varphi(\xi_2), \cdots, \varphi(\xi_n)$ 也是 V 的标准正交基. 所以 A 是从标准正交基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 到标准正交基 $\varphi(\xi_1), \varphi(\xi_2), \cdots, \varphi(\xi_n)$ 的过渡矩阵，所以 A 是正交矩阵.

(4) $\Rightarrow$ (5): 显然.

(5)$\Rightarrow$ (3): 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是 V 的一个标准正交基,

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)A.$$

因为 A 是正交矩阵，所以 $\varphi(\xi_1), \varphi(\xi_2), \cdots, \varphi(\xi_n)$ 也是 V 的标准正交基.

(3) $\Rightarrow$ (1): 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是 V 的一个标准正交基， $\varphi(\xi_1), \varphi(\xi_2), \cdots, \varphi(\xi_n)$ 也是 V 的标准正交基. 对任意 $\alpha, \beta \in V$, $\alpha = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \cdots + a_n\xi_n$, $\beta = b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + \cdots + b_n\xi_n$, 有 $(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = (a_1\varphi(\xi_1) + a_2\varphi(\xi_2) + \cdots + a_n\varphi(\xi_n), b_1\varphi(\xi_1) + b_2\varphi(\xi_2) + \cdots + b_n\varphi(\xi_n)) = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = (a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n, b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + \cdots + b_n\varepsilon_n) = (\alpha, \beta)$. $\square$

命题 8.4.2 设 n 阶实矩阵 A 是正交阵，则

(1) $\det A = \pm 1$;

(2) A 的特征值的绝对值等于 1.

证明 (1) 显然.

(2) 设 λ 是 A 的特征值， X 是属于 λ 的特征向量，则 $AX = \lambda X$. 两边同取共轭转置，于是 $\bar{X}A^T = \bar{\lambda}\bar{X}^T$, 所以

$$\bar{X}A^TAX = \bar{\lambda}\bar{X}^T\lambda X,$$

所以

$$\bar{X}^TX = \bar{\lambda}\lambda(\bar{X}^TX).$$

因此， $\bar{\lambda}\lambda = 1$. 即 $|\lambda| = 1$. □

引理 8.4.1 设 A 为 n 阶正交阵， $\lambda = a + bi$ 为 A 的一个复特征值（ $b \neq 0$ ）， $X = \alpha + \beta i$ 为对应的特征向量，其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$. 则 α 和 β 正交且 $|\alpha| = |\beta|$.

证明 因为 $A(\alpha + \beta i) = (a + bi)(\alpha + \beta i)$, 所以 $A\alpha = a\alpha - b\beta$, $A\beta = b\alpha + a\beta$. 从而

$$|\alpha|^2 = (\alpha, \alpha) = (A\alpha, A\alpha) = a^2|\alpha|^2 + b^2|\beta|^2 - 2ab(\alpha, \beta) \tag{1}$$

$$|\beta|^2 = (\beta, \beta) = (A\beta, A\beta) = b^2|\alpha|^2 + a^2|\beta|^2 + 2ab(\alpha, \beta) \tag{2}$$

$(1) - (2)$, 得

$$(a^2 - b^2 - 1)|\alpha|^2 + (b^2 - a^2 + 1)|\beta|^2 - 4ab(\alpha, \beta) = 0 \tag{3}$$

而

$$(\alpha, \beta) = (A\alpha, A\beta) = (a^2 - b^2)(\alpha, \beta) + ab(|\alpha|^2 - |\beta|^2) \tag{4}$$

由 $(3), (4)$, 得

$$\begin{cases} (a^2 - b^2 - 1)(|\alpha|^2 - |\beta|^2) - 4ab(\alpha, \beta) = 0 \\ ab(|\alpha|^2 - |\beta|^2) + (a^2 - b^2 - 1)(\alpha, \beta) = 0 \end{cases}$$

其可视为关于 $(|\alpha|^2 - |\beta|^2)$ 和 (α, β) 的方程组. 由于

$$\begin{vmatrix} a^2 - b^2 - 1 & -4ab \\ ab & a^2 - b^2 - 1 \end{vmatrix} = (a^2 - b^2 - 1)^2 + 4a^2b^2 = 4b^4 + 4a^2b^2 = 4b^2(b^2 + a^2) = 4b^2 \neq 0,$$

因此方程组只有零解，即 $|\alpha|^2 = |\beta|^2$, 且 $(\alpha, \beta) = 0$. □

因为 A 为正交阵，因此特征值模长为 1, 即 $a^2 + b^2 = 1$, 可设 $a = \cos\theta, b = -\sin\theta$. 这样

$$A\alpha = a\alpha - b\beta = (\alpha, \beta)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad A\beta = b\alpha + a\beta = (\alpha, \beta)\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$A(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

定理 4.4.4 设 A 为 n 阶正交阵，则存在 n 阶正交阵 T, 使

$$T^{-1}AT = T^TAT = \mathrm{diag}(E_r, -E_s, \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \cos\alpha_l & -\sin\alpha_l \\ \sin\alpha_l & \cos\alpha_l \end{pmatrix})$$

其中 $r + s + 2l = n$.

证明 对阶数用数学归纳法.

当 $n = 1$ 时，显然成立. 设当阶数 $\leq n$ 时命题成立.

当阶数为 n 时,

(1) 若 A 有一个实特征根 λ_0, 则取其单位特征向量 X_1, 扩为 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基 $X_1, X_2, \cdots, X_n$, 则

$$A(X_1, X_2, \cdots, X_n) = (X_1, X_2, \cdots, X_n)\begin{pmatrix} \lambda_0 & \beta \\ O & A_1 \end{pmatrix}.$$

这里 A_1 是 $n - 1$ 阶方阵， $\beta \in \mathbb{R}^{n-1}$. 令 $T_1 = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$, 则

$$T_1^{-1}AT_1 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \beta \\ O & A_1 \end{pmatrix} = B.$$

因为 $T^{-1}=T^T$, 所以 $A^{-1}=A^T$. 进一步 $B^{-1}=B^T$, 即 B 是正交阵，故

$$BB^T=\begin{pmatrix}\lambda_0 & \beta\\ O & A_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_0 & O\\ \beta^T & A_1^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_0^2+\beta\beta^T & \beta A_1^T\\ A_1\beta^T & A_1A_1^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & O\\ O & E_{n-1}\end{pmatrix}$$

得 $\lambda_0^2+\beta\beta^T=1$, $A_1A_1^T=E$. 而 $\lambda_0^2=1$, 因此 $\beta=0$, $A_1^TA_1=E$. 即

$$B=\begin{pmatrix}\lambda_0 & O\\ O & A_1\end{pmatrix},$$

其中 A_1 是正交阵. 由归纳假设，存在 $n-1$ 阶正交阵 T_2, 使

$$T_2^{-1}A_1T_2=\mathrm{diag}\{E_r,-E_s,\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\cos\alpha_l & -\sin\alpha_l\\ \sin\alpha_l & \cos\alpha_l\end{pmatrix}\}$$

令 $T=T_1\begin{pmatrix}1 & \\ & T_2\end{pmatrix}$, 则 T 为 n 阶正交阵，且

$$T^{-1}AT=\mathrm{diag}\{\lambda_0,E_r,-E_s,\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\cos\alpha_l & -\sin\alpha_l\\ \sin\alpha_l & \cos\alpha_l\end{pmatrix}\}.$$

因为 $\lambda_0=\pm1$, 命题成立.

(2) 若 A 无实特征根. 设 $\lambda=a+bi$ 是其特征根， $\alpha+\beta i$ 为相应特征向量，则由引理 8.4.1, α 与 β 正交，且且 $|\alpha|^2=|\beta|^2$. 因 $|\lambda|=1$, 故可设 $\lambda=\cos\alpha+i\sin\alpha$. 取 α,β 的单位化向量 X_1,X_2, 则有

$$AX_1=\cos\alpha X_1+\sin\alpha X_2=(X_1,X_2)\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix},$$

$$AX_2=-\sin\alpha X_1+\cos\alpha X_2=(X_1,X_2)\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}.$$

将 X_1,X_2 扩为 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基 $X_1,X_2,\cdots,X_n$, 则

$$A(X_1,X_2,\cdots,X_n)=(X_1,X_2,\cdots,X_n)\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} & C\\ O & A_2\end{pmatrix}.$$

令 $T_1=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$, 则 T_1 是正交阵且

$$T_1^TAT_1=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} & C\\ O & A_2\end{pmatrix}=B.$$

因 T_1, A 为正交阵，所以 B 为正交阵. 故

$$\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} & C\\ O & A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}^T & O\\ C^T & A_2^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_2 & O\\ O & E_{n-2}\end{pmatrix}.$$

所以 $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}^T+CC^T=E_2$, $A_2C^T=O$, $A_2A_2^T=E_{n-2}$. 故 A_2 是正交阵，且 $C=O$, 即

$$B=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} & O\\ O & A_2\end{pmatrix}.$$

由归纳假设，存在 $n-2$ 阶正交矩阵 T_2, 使得

$$T_2^{-1}A_2T_2 = \mathrm{diag}(E_r, -E_s, \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \cos\alpha_l & -\sin\alpha_l \\ \sin\alpha_l & \cos\alpha_l \end{pmatrix}).$$

令 $T = T_1\begin{pmatrix} E_2 & O \\ O & T_2 \end{pmatrix}$, 则 T 为正交阵且

$$T^{-1}AT = \mathrm{diag}(\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, E_r, -E_s, \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \cos\alpha_l & -\sin\alpha_l \\ \sin\alpha_l & \cos\alpha_l \end{pmatrix}).$$

定理 8.4.4' 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 的正交变换，则存在一组标准正交基，使得 φ 在此基下的矩阵是

$$\mathrm{diag}(E_r, -E_s, \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \cos\alpha_l & -\sin\alpha_l \\ \sin\alpha_l & \cos\alpha_l \end{pmatrix}),$$

其中 $r+s+2l=n$.

习题

1. 写出 §8.1 的例 1 和例 2 中 $\mathbb{R}^n$ 作为不同两种内积的不同的欧氏空间之间的同构映射.

2. (1) 设 A 是奇数阶正交矩阵，且 $\det A = 1$, 则 1 是 A 的一个特征值;
(2) 设 A 是 n 阶正交矩阵，且 $\det A = -1$, 则 -1 是 A 的一个特征值.

3. 设 η 是 n 维欧氏空间 V 中一单位向量，定义 $\varphi(\alpha) = \alpha - 2(\eta, \alpha)\eta$. 证明：
(1) φ 是正交变换 (称为镜面反射);
(2) $\varphi^2 = \mathrm{id}_V$;
(3) 存在 V 的一个标准正交基，使得 φ 在这个标准正交基下的矩阵 $\begin{pmatrix} -1 & O \\ O & E_{n-1} \end{pmatrix}$.

4. 如果 V 上的正交变换 φ 以 1 作为一个特征值，且属于特征值 1 的特征子空间 V_1 的维数为 $n-1$, 那么 φ 是镜面反射.

5. 设 α, β 是 n 维欧氏空间 V 中两个不同的单位向量，证明存在一镜面反射 φ, 使得 $\varphi(\alpha) = \beta$;

6. 证明： n 维欧氏空间中任意正交变换都可以表为一系列镜面反射的乘积.

7. 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 上的线性变换，对于任意的 $\alpha, \beta \in V$, 都有 $(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = (\alpha, \beta)$. 证明： φ 是线性变换，因而是正交变换.

复习题

1. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 和 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 是欧氏空间 V 的两组向量，满足

$$(\alpha_i, \alpha_j) = (\beta_i, \beta_j),$$

$1 \le i, j \le m$. 证明

$$\mathrm{span}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) \cong \mathrm{span}(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m).$$

2. 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. 求证：线性方程组 $AX = b$ 有解的充分必要条件是 b 与线性方程组 $A^TX = 0$ 的解空间在 $\mathbb{R}^n$ 中正交.

3. 设 U 是 n 维欧氏空间 V 的子空间，由 $V = U \oplus U^{\perp}$，我们可定义 V 上的线性变换 φ 如下：对于 $\alpha + \beta \in U \oplus U^{\perp}$，$\varphi(\alpha + \beta) = \alpha$.

(1) φ 是欧氏空间 V 上的幂等线性变换，即 $\varphi^2 = \varphi$. 这个线性变换称为从 V 到 U 的 **正投影**;

(2) $\mathrm{id}_V - \varphi$ 是 V 到 $U^{\perp}$ 的正投影;

(3) 对任意 $\alpha, \beta \in V$，都有 $(\varphi(\alpha), \beta) = (\alpha, \varphi(\beta))$.

4. 设 A 是 n 阶实可逆阵. 求证： $A = TQ$，其中 T 是正交阵， Q 是上三角阵且对角线元素大于零.

5. 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 上的线性变换. 证明： φ 是对称变换的充分必要条件是 φ 有 n 个两两正交的特征向量.

6. 设 A, B 是 $\mathbb{R}$ 上 n 阶对称阵，且 $AB = BA$. 求证：存在正交阵 T，使得 $T^{-1}AT, T^{-1}BT$ 同时为对角阵.

7. 设 A_i, $1 \leq i \leq m$ 是 m 个 n 阶实对称阵且两两乘法可交换，求证：存在正交阵 T，使 $T^T A_i T$, $1 \leq i \leq m$ 都是对角阵.

8. 设三阶实对称阵 A 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$，又 $\alpha_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量，记 $B = A^5 - 4A^3 + E$.

(1) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量，并求 B 的全部特征值和特征向量;

(2) 求矩阵 B.

9. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\beta = (1, 1, -2)^T$. 已知线性方程组 $AX = \beta$ 有解但不唯一. 试求

(1) a 的值;

(2) 正交矩阵 T，使得 $T^T AT$ 为对角矩阵.

10. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & a \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$，已知 $\alpha = (1, 1, 1)^T$ 是 A 的特征向量.

(1) 求 a, b 的值及特征向量 α 所对应的特征值;

(2) 求 A 的全部特征值和特征向量;

(3) 问 A 是否可对角化？若是，求正交矩阵 T，使得 $T^{-1}AT$ 为对角阵.