第八章　欧氏空间

§8.3 对称变换，对称矩阵

首先讨论欧氏空间的线性变换在不同的标准正交基下的矩阵的正交相似关系.

设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 和 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的的标准正交基，T 是从基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 到 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 的过渡矩阵，是正交矩阵，即

$$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)T.$$

设 φ 是 n 维欧氏空间 V 的线性变换，φ 在两个标准正交基下的矩阵分别是 A,B, 即

$$\varphi(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)A,$$

$$\varphi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)B,$$

则有 $B=T^{-1}AT=T^TAT$.

定义 8.3.1 设 A,B 是 $\mathbb{R}$ 上 n 阶方阵，如果存在正交矩阵 T, 使得

$$B=T^{-1}AT=T^TAT,$$

则称 A**正交相似** 于 B.

从上面的分析直接得到如下定理.

定理 8.3.1 $\mathbb{R}$ 上两个 n 阶方阵 A,B 正交相似的充分必要条件是它们为欧氏空间 V 上同一个线性变换在不同的标准正交基下的矩阵.

定理 8.3.2 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 上的正交相似关系满足：(1) 反身性，即 A 正交相似于 A; (2) 对称性，即若 A 正交相似于 B, 则 B 正交相似于 A; (3) 传递性，即若 A 正交相似于 B, B 正交相似于 C, 则 A 正交相似于 C.

证明 根据定义和正交矩阵的性质. □

对于欧氏空间的线性变换，重要的任务是寻找正交相似下的标准形. 下面讨论一类特殊的但重要的对称变换，下一节将讨论正交变换.

定义 8.3.2 设 φ 是 n 欧氏空间 V 上的线性变换，如果满足对于任意的 $\alpha,\beta\in V$, 都有

$$(\varphi(\alpha),\beta)=(\alpha,\varphi(\beta)),$$

则称 φ 是 **对称变换**.

定理 8.3.3 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 的线性变换，则下列条件等价：

(1) φ 是对称变换;
(2) 存在 V 的一个标准正交基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$, 有使得 $(\varphi(\xi_i),\xi_j)=(\xi_i,\varphi(\xi_j))$, $1\le i,j\le n$;
(3) φ 在 V 的任一个标准正交基下的矩阵是对称阵;
(4) φ 在 V 的某一个标准正交基下的矩阵是对称阵.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 显然.

(2) $\Rightarrow$ (3) 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为 V 的一组标准正交基, 则

$$\varphi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)A,$$

记 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 则

$$(\varphi(\xi_i),\xi_j)=(a_{1i}\xi_1+a_{2i}\xi_2+\cdots+a_{ni}\xi_n,\xi_j)=a_{ji},$$

$$(\xi_i,\varphi(\xi_j))=(\xi_i,a_{1j}\xi_1+a_{2j}\xi_2+\cdots+a_{nj}\xi_n,\xi_j)=a_{ij},$$

所以 $a_{ij}=a_{ji}$, $1\le i,j\le n$, 即 $A=A^T$.

(3) $\Rightarrow$ (4) 显然.

(4) $\Rightarrow$ (2) 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为 V 的一组取定的标准正交基,

$$\varphi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)A,$$

其中 $A^T=A$. 则

$$(\varphi(\xi_i),\xi_j)=(a_{1i}\xi_1+a_{2i}\xi_2+\cdots+a_{ni}\xi_n,\xi_j)=a_{ji},$$

$$(\xi_i,\varphi(\xi_j))=(\xi_i,a_{1j}\xi_1+a_{2j}\xi_2+\cdots+a_{nj}\xi_n,\xi_j)=a_{ij},$$

所以 $(\varphi(\xi_i),\xi_j)=(\xi_i,\varphi(\xi_j))$, $1\le i,j\le n$.

(2) $\Rightarrow$ (1) 对于 V 的标准正交基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$, 任取 $\alpha,\beta\in V$, $\alpha=a_1\xi_1+a_2\xi_2+\cdots+a_n\xi_n$, $\beta=b_1\xi_1+b_2\xi_2+\cdots+b_n\xi_n$, 所以

$$\begin{array}{ll}(\varphi(\alpha),\beta) & =(a_1\varphi(\xi_1)+a_2\varphi(\xi_2)+\cdots+a_n\varphi(\xi_n),b_1\xi_1+b_2\xi_2+\cdots+b_n\xi_n)\\ & =\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n a_kb_l(\varphi(\xi_k),\xi_l)\\ & =\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n a_kb_l(\xi_k,\varphi(\xi_l))\\ & =(a_1\xi_1+a_2\xi_2+\cdots+a_n\xi_n,b_1\varphi(\xi_1)+b_2\varphi(\xi_2)+\cdots+b_n\varphi(\xi_n))\\ & =(\alpha,\varphi(\beta))\end{array}.$$

□

从证明的过程中我们看到，在取定欧氏空间的一个标准正交基的前提下，对称变换和实对称矩阵是一一对应的. 下面讨论对称变换或对称矩阵在正交相似下的标准形.

定理 8.3.4 设 A 是实对称阵，则 A 的特征值全为实数且属于不同特征值的特征向量在 $\mathbb{R}^n$ 中相互正交.

证明 设

$$AX=\lambda X,$$

其中 $\lambda\in\mathbb{C}$, $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\neq 0\in\mathbb{C}^n$. 则从 $\overline{AX}=\overline{\lambda_0X}$ 得到 $A\overline{X}=\overline{\lambda_0}\overline{X}$, 所以

$$X^TA\overline{X}=\overline{\lambda_0}X^T\overline{X}.$$

另一方面，从 $X^TA=\lambda X^T$ 得到

$$X^TA\overline{X}=\lambda X^T\overline{X}.$$

因为 $X\neq 0$, 所以 $X^T\overline{X}\neq 0$. 这样 $\overline{\lambda}=\lambda$, 即 $\lambda\in\mathbb{R}$.

设 λ,μ 是 A 的两个不同特征值， X,Y 分别是属于 λ,μ 的特征向量，即 $AX=\lambda X$, $AY=\mu Y$. 这样

$$\lambda X^TY=X^TAY=\mu X^TY.$$

而 $\lambda\neq\mu$, 于是 $X^TY=0$, 即 $(X,Y)=0$. □

定理 8.3.4' 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 的对称变换，则 φ 的特征值全为实数，且属于不同特征值的特征向量相互正交.

定理 8.3.5 设 A 是 $\mathbb{R}$ 上 n 阶对称矩阵. 则存在正交阵 T, 使得 $T^{-1}AT=T^TAT$ 为对角阵，对角线元素为 A 的特征值.

证明 对 A 的阶数 n 作数学归纳法. 当 $n=1$ 时，结论显然成立. 假设结论对 $n-1$ 阶的对称矩阵成立. 考虑 n 阶对称阵. 由定理 8.3.4, 知 A 必有实特征值 λ_1 和相应的特征向量 X_1, 将 X_1 单位化还记成 X_1, 并将 X_1 扩为 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基 $X_1,X_2,\cdots,X_n$. 则

$$A(X_1,X_2,\cdots,X_n)=(X_1,X_2,\cdots,X_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & \alpha^T\\ O & A_1\end{pmatrix}.$$

令 $T_1=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$, 则 T_1 为正交阵，且

$$T_1^{-1}AT_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \alpha^T\\ O & A_1\end{pmatrix},$$

又因为 $A^T=A$, 所以 $\begin{pmatrix}\lambda_1 & \alpha^T\\ O & A_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & O\\ \alpha & A_1\end{pmatrix}$. 故 $\alpha=0$, $A_1=A_1^T$. 根据归纳假设，存在正交阵 T_2, 使得

$$T_2^{-1}A_1T_2=\begin{pmatrix}\lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

令 $T=T_1\begin{pmatrix}1 & O\\ O & T_2\end{pmatrix}$, 则 T 为正交阵，且有

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

□

定理 8.3.5' 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 上的对称变换，则存在 V 的一个标准正交基，使得 φ 在这个基下的矩阵是对角阵，且这组基恰为 φ 的 n 个线性无关的特征向量.

引理 8.3.1 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 个有序实数， $\lambda_{\sigma(1)},\lambda_{\sigma(2)},\cdots,\lambda_{\sigma(n)}$ 是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的一个排列，则 $\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$ 正交相似于 $\mathrm{diag}\{\lambda_{\sigma(1)},\lambda_{\sigma(2)},\cdots,\lambda_{\sigma(n)}\}$.

证明 两个矩阵可以经过对换对角线的的元素得到. 互换第 i 个对角线元素和第 j 个对角线元素相当于先后左乘互换矩阵 $E(i,j)$. 而 $E(i,j)$ 是正交阵且 $E(i,j)^{-1}=E(i,j)^T=E(i,j)$. □

根据引理, 从定理 8.3.5 知下面的推论.

推论 8.3.1 设 A,B 是实对称矩阵, 则下列叙述是等价的.
(1) A 正交相似于 B;
(2) A 和 B 有相同的特征值;
(3) A 和 B 有相同的特征多项式.

下面我们通过具体的例子来说明对实对称矩阵 A, 如何求正交矩阵 T, 使得 T^TAT 是对角阵.

例 1 求正交矩阵 T, 使 T^TAT 为对角阵, 其中

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

解
$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$
$=(\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -4 & 2 \\ -2 & \lambda-9 & 4 \\ 0 & o & 1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-11\lambda+10)=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$
因此 A 的特征值是 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=10$.
对 $\lambda=10$, 求解齐次线性方程组 $(10E-A)X=0$, 得到基础解系

$$\xi_1=(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})^T.$$

对 $\lambda=1$, 求解齐次线性方程组 $(E-A)X=0$, 得到基础解系 $(0,1,1)^T$ 与 $(2,-1,0)^T$, 用 Schmidt 方法将其正交化, 再单位化, 得

$$\xi_2=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T,$$

$$\xi_3=(\frac{4}{\sqrt{18}},-\frac{1}{\sqrt{18}},\frac{1}{\sqrt{18}})^T.$$

因此

$$T=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix},$$

则

$$T^TAT=\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

从例子可以看出化实对称阵 A 为对角化的方法:
(1) 计算 A 的特征多项式 $\det(\lambda E-A)$, 求出所有根, 必在 $\mathbb{R}$ 中;

(2) 对每个特征值 λ_i, 解线性方程组 $(\lambda E-A)X=0$, 得到特征子空间的一组基, 施行 Schmidt 正交化，单位化，得到特征子空间的一组标准正交基;

(3) 将不同特征子空间的标准正交基凑成 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$, 令 $T=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$, 则 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵, 对角元素分别是对应于 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$ 的全部特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

例 2 设 A 是 3 阶实对称矩阵, A 的特征值为 $2,1,1$. 已知属于特征值 2 的特征向量 $X_1=(1,1,0)^T$, 又向量 $X_2=(1,-1,0)^T$ 是属于特征值 1 的特征向量, 求矩阵 A.

解 由定理 8.3.4 知 A 有一特征向量与 X_1,X_2 都正交. 设之为 $X_3=(x_1,x_2,x_3)^T$, 得

$$\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_1-x_2=0 \end{cases}$$

解得 $X_3=(0,0,1)^T$. 将 X_1,X_2,X_3 单位化，得

$$Y_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T,Y_2=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T,Y_3=(0,0,1)^T.$$

记

$$T=(Y_1,Y_2,Y_3)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$A=T\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}T^T=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例 3 设三阶实对称阵 A 的各行元素之和为 3, 向量 $\alpha_1=(-1,2,-1)^T$, $\alpha_2=(0,-1,1)^T$ 是线性方程组 $AX=0$ 的两个解.

(1) 求 A 的特征值和特征向量;

(2) 求正交矩阵 T 和对角阵 B, 使得 $T^{-1}AT=T^TAT=B$;

(3) 求 A 和 $(A-\frac{3}{2}E)^6$.

解 (1) 因为 A 的各行元素之和为 3, 所以

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以 A 的属于特征值 3 的特征向量为 $k_3\alpha_3=k_3(1,1,1)^T$, 其中 k_3 为非零常数;

又因为向量 $\alpha_1=(-1,2,-1)^T$, $\alpha_2=(0,-1,1)^T$ 是线性方程组 $AX=0$ 的两个解. 所以 A 的属于特征值 0 的特征向量为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$, 其中 k_1,k_2 为不全为零的常数.

(2) 对 α_1,α_2 做正交化，得到

$$\beta_1=\alpha_1=(-1,2,-1)^T,\quad \beta_2=\frac{1}{2}(-1,0,1)^T.$$

单位化得到

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)^T,\ \ \gamma_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T,\ \ \gamma_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T.$$

令 $T=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$, 则

$$T^{-1}AT=T^TAT=B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

(3) 因为

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(0,0,3\alpha_3).$$

所以

$$A=(0,0,3\alpha_3)(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

记 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, 则

$$A=P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}P^{-1}.$$

所以

$$(A-\frac{3}{2}E)^6=P\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}&0&0\\0&-\frac{3}{2}&0\\0&0&\frac{3}{2}\end{pmatrix}^6P^{-1}=(\frac{3}{2})^6E.$$

习题

1. 求正交矩阵 T, 使 T^TAT 为对角阵，其中 A 为

(1) $A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}$,

(2) $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$.

2. 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 上的对称变换， U 是 $\varphi-$ 不变子空间，则 $U^\perp$ 也是 $\varphi-$ 不变子空间.

3. 证明 n 维欧氏空间的两个对称变换 φ,ψ 有公共的由它们的特征向量组成的标准正交基的充要条件是 $\varphi\psi=\psi\varphi$.

4. 已知 $\lambda_1=6$, $\lambda_2=\lambda_3=3$ 是实对称阵的三个特征值. 且对应于 $\lambda_2=\lambda_3$ 的特征向量为 $\alpha_2=(-1,0,1)^T$, $\alpha_3=(1,-2,1)^T$, 求 A 的对应于 λ_1 的特征向量及 A.

5. 已知 $\alpha_1=(1,-2,1)^T$, $\alpha_2=(-1,a,1)^T$ 依次是三阶不可逆实对称阵 A 的属于特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1$ 的特征向量. 求

(1) A;

(2) $A^{2010}\beta$, 其中 $\beta=(1,1,1)^T$.

6. 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 上的对称变换， $\varphi^2=\varphi$, 则存在 V 的一个标准正交基，使得 φ 在此基下的矩阵为 $\mathrm{diag}\{E_r,0\}$.

7. 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 上的对称变换， $\varphi^2=\mathrm{id}_V$, 则存在 V 的一个标准正交基，使得 φ 在此基下的矩阵为 $\mathrm{diag}\{E_r,-E_{n-r}\}$.