第八章　欧氏空间

§8.2 正交基

定义 8.2.1 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是 n 维内积空间 V 的一组向量. 若 $(\alpha_i, \alpha_j) = 0$, $1 \le i \ne j \le m$, 则称为一组 **正交向量**. 若还满足 $|\alpha_i| = 1$, $1 \le i \le m$, 则称为 **标准正交向量**.

定义 8.2.2 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是 n 维内积空间 V 的一个基. 若 $(\xi_i, \xi_j) = 0$, $1 \le i \ne j \le n$, 则称这个基是 V 的一个正交基. 若还满足 $|\xi_i| = 1$, $1 \le i \le n$, 则称这个基是 V 的一个 **标准正交基**.

例 1 在欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是一个标准正交基. 向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, 0, \cdots, 0)^T$,$\alpha_3 = (1, 1, 1, \cdots, 0)^T$,$\cdots$, $\alpha_n = (1, 1, 1, \cdots, 1)^T$ 是一个基，但不是标准正交基.

命题 8.2.1 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是 n 维内积空间 V 的一组标准正交基，则对任意的 $\alpha \in V$, 有

$$\alpha = (\alpha, \xi_1)\xi_1 + (\alpha, \xi_2)\xi_2 + \cdots + (\alpha, \xi_n)\xi_n.$$

证明 设 $\alpha = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \cdots + a_n\xi_n$. 则 $(\xi_i, \alpha) = (\xi_i, a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \cdots + a_n\xi_n) = a_i$, $1 \le i \le n$. □

引理 8.2.1 欧式空间 V 中的任何一组两两正交的非零向量必线性无关.

证明 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是 V 中两两正交的向量组，若

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_m\alpha_m = 0,$$

则对于任意的 i, $1 \le i \le m$, 有

$$(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_m\alpha_m, \alpha_i) = 0.$$

而 $(\alpha_i, \alpha_j) = 0$, 故 $a_i(\alpha_i, \alpha_i) = 0$. 由于 $\alpha_i \ne 0$, 故 $a_i = 0$. □

定理 8.2.1(Schmidt **正交化定理**) 对于欧氏空间 V 的一个线性无关向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, 必存在正交单位向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s$, 使得对于任意的 r, $1 \le r \le s$, 总有

$$\mathrm{span}(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) = \mathrm{span}(\gamma_1, \cdots, \gamma_r).$$

证明 对于线性无关向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, 进行 Schmidt 正交化

$$\beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1, \quad \cdots$$

$$\beta_r = \alpha_r - \frac{(\alpha_r, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_r, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 - \cdots - \frac{(\alpha_r, \beta_{r-1})}{(\beta_{r-1}, \beta_{r-1})}\beta_{r-1}, 3 \le r \le s.$$

显然有
$$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r\},$$
$1\le r\le s$. 下面证明 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 两两正交. 对 r 做数学归纳法.

首先, $(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_1,(\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1)=(\alpha_1,(\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2)-\frac{(\alpha_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}(\alpha_1,\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2)-(\alpha_2,\alpha_1)=0.$

假设 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{r-1}$ 两两正交，下面证明
$$\beta_r=\alpha_r-\frac{(\alpha_r,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_r,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_r,\beta_{r-1})}{(\beta_{r-1},\beta_{r-1})}\beta_{r-1}=\alpha_r-\sum_{i=1}^{r-1}\frac{(\alpha_r,\beta_i)}{(\beta_i,\beta_i)}\beta_i$$
与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{r-1}$ 两两正交. 事实上，对任意 j, $1\le j\le r-1$,
$$\begin{aligned}(\beta_j,\beta_r)\quad &=(\beta_j,(\alpha_r-\textstyle\sum_{i=1}^{r-1}\frac{(\alpha_r,\beta_i)}{(\beta_i,\beta_i)}\beta_i)\\ &=(\beta_j,\alpha_r)-(\beta_j,(\textstyle\sum_{i=1}^{r-1}\frac{(\alpha_r,\beta_i)}{(\beta_i,\beta_i)}\beta_i)\\ &=(\beta_j,\alpha_r)-\textstyle\sum_{i=1}^{r-1}\frac{(\alpha_r,\beta_i)}{(\beta_i,\beta_i)}(\beta_j,\beta_i)\\ &=(\beta_j,\alpha_r)-\frac{(\alpha_r,\beta_j)}{(\beta_j,\beta_j)}(\beta_j,\beta_j)\\ &=(\beta_j,\alpha_r)-(\alpha_r,\beta_j)\\ &=0\end{aligned}.$$
所以 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 两两正交. 再进行单位化,
$$\gamma_i=\frac{\beta_i}{|\beta_i|},1\le i\le s.$$
则 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$ 是正交单位向量组且
$$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}=\{\beta_1,\cdots,\beta_r\}=\{\gamma_1,\cdots,\gamma_r\},$$
$1\le r\le s.$ □

推论 8.2.1 有限维欧氏空间必有标准正交基.

推论 8.2.2 有限维欧氏空间 V 的任意单位正交组都可扩为 V 的标准正交基.

例 2 求与向量组 $\alpha_1=(1,1,1,1)^T,\alpha_2=(1,-2,-3,-4)^T,\alpha_3=(1,2,2,3)^T$ 等价的一个正交单位向量组.

解 先利用 Schmidt 正交化方法求出与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等价的正交向量组.
$$\beta_1=\alpha_1=(1,1,1,1)^T,$$
$$\begin{aligned}\beta_2&=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(1,-2,-3,-4)^T-\frac{1-2-3-4}{1+1+1+1}(1,1,1,1)^T\\ &=(1,-2,-3,-4)^T+2(1,1,1,1)^T=(3,0,-1,-2)^T,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\beta_3&=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2\\ &=(1,2,2,3)^T-\frac{1+2+2+3}{1+1+1+1}(1,1,1,1)^T-\frac{3-2-6}{9+1+4}(3,0,-1,-2)^T\end{aligned}$$

$$= (1,2,2,3)^T - 2(1,1,1,1)^T + \frac{5}{14}(3,0,-1,-2)^T = (\frac{1}{14}, 0, -\frac{5}{14}, \frac{4}{14})^T.$$

再将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 单位化，得到

$$\gamma_1 = \frac{1}{|\beta_1|}\beta_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)^T = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}),$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{|\beta_2|}\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{14}}(3,0,-1,-2)^T = (\frac{3}{\sqrt{14}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}),$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{|\beta_3|}\beta_3 = \frac{14}{\sqrt{42}}(\frac{1}{14}, 0, -\frac{5}{14}, \frac{4}{14})^T = (\frac{1}{\sqrt{42}}, 0, -\frac{5}{\sqrt{42}}, \frac{4}{\sqrt{42}}).$$

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 即是所求向量组.

设 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 和 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的两个标准正交基， T 是从基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 到 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 的过渡矩阵，即

$$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)T.$$

记 $T = (t_{ij})_{n\times n}$, 则

$$\begin{aligned}
\delta_{ij} &= (\xi_i, \xi_j) \\
&= (t_{1i}\eta_1 + t_{2i}\eta_2 + \cdots + t_{ni}\eta_n, t_{1j}\eta_1 + t_{2j}\eta_2 + \cdots + t_{nj}\eta_n) \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n t_{ki}t_{lj}(\eta_i, \eta_j) \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n t_{ki}t_{lj}\delta_{ij} \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^n t_{ki}t_{kj}.
\end{aligned}$$

所以 $T^T T = E$.

定义 8.2.3 实 n 阶方阵 T 称为 **正交阵**, 如果 $T^T T = E$.

命题 8.2.2 设 T, S 为正交阵，则
(1) T 可逆且 T^{-1} 为正交阵;
(2) TS 为正交阵.

证明 直接验证. □

定理 8.2.2 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 和 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的两个向量组，满足

$$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)T,$$

其中 T 是 n 阶实方阵. 则

(1) 若 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 和 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的的标准正交基，且 T 是正交矩阵，且是从基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 到 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 的过渡矩阵;

(2) 若 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的的标准正交基， T 是正交矩阵, 则 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的的标准正交基;

(2) 若 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的的标准正交基， T 是正交矩阵, 则 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的的标准正交基.

定理 8.2.3 设 A 是实 n 阶方阵，则下列叙述等价.

(1) T 是正交阵;
(2) $T^T = T^{-1}$;
(3) T 的列向量是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基;
(4) T 的行向量是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基.

定理 8.2.4 设 U 是欧氏空间 V 的子空间，令

$$U^\perp = \{\alpha \in V \mid 对于任意\beta \in U, 都有(\alpha, \beta) = 0\},$$

则
(1) $U^\perp$ 是 V 的子空间;
(2) $V = U \oplus U^\perp$.

证明 (1) 直接验证.
(2) 若 $\alpha \in U \cap U^\perp$, 则 $(\alpha, \alpha) = 0$, 所以 $\alpha = 0$, 因此 $U \cap U^\perp = 0$.
下面证明 $V = U + U^\perp$. 对任意 $\alpha \in V$, 由推论 8.2.1 知,必存在 U 的一组标准正交基 $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m\}$. 令

$$\beta = (\alpha, \xi_1)\xi_1 + (\alpha, \xi_2)\xi_2 + \cdots + (\alpha, \xi_m)\xi_m,$$

则 $\beta \in U$. 又令 $\gamma = \alpha - \beta$, 则对任意 ξ_i, $1 \le i \le m$, 有 $(\gamma, \xi_i) = (\alpha, \xi_i) - (\beta, \xi_i) = 0$. 所以 $\gamma \in U^\perp$, 而 $\alpha = \beta + \gamma$. 从而 $V = U \oplus U^\perp$ 成立. □

定义 8.2.4 设 U 是欧氏空间 V 的子空间，称

$$U^\perp = \{\alpha \in V \mid 对于任意\beta \in U, 都有(\alpha, \beta) = 0\},$$

为 U 的 **正交补空间**.

例 3 设 A 是实数域上 $m \times n$ 矩阵， U 是 A 的行向量生成的子空间， V 是线性方程组 $AX = 0$ 的解空间，则 $V = U^\perp$, 且 $\mathbb{R}^n = U \oplus V$.

证明 设 A 的行向量为 $\alpha_1^T, \alpha_2^T, \cdots, \alpha_m^T$, 则 $U = \mathrm{span}(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \cdots, \alpha_m^T)$. 对于 $AX = 0$ 的任意解 β, 因为 $A\beta = 0$, 即 $(\alpha_i, \beta) = 0$. 所以 $V \subseteq U^\perp$. 反之，设 $\beta \in U^\perp$, 则 $(\beta, \alpha_i) = 0$, $1 \le i \le m$. 故 $A\beta = 0$. 所以 $U^\perp \subseteq V$. 这样 $V = U^\perp$.
我们断言，$U \cap U^\perp = 0$. 事实上，设 $\alpha \in U \cap U^\perp$, 则 $(\alpha, \alpha) = 0$, 所以 $\alpha = 0$. 故 $U + V = U \oplus V$. 又因为 $\dim V + \dim U = n$, 即 $\dim V + \dim U = n$, 故 $\mathbb{R}^n = U \oplus V$.

例 4 设 B 是秩为 2 的 5×4 矩阵， $\alpha_1 = (1, 1, 2, 3)^T, \alpha_2 = (-1, 1, 4, -1)^T, \alpha_3 = (5, -1, -8, 9)^T$ 是齐次线性方程组 $BX = 0$ 的解向量. 求 $BX = 0$ 解空间的一个标准正交基.

解 $r(B) = 2$, 所以解空间的维数是 2. 经验证， α_1, α_2 线性无关，可作为解空间的一组基. 运用 Schimidt 正交化方法，令

$$\beta_1 = \alpha_1 = (1, 1, 2, 3)^T,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = (-1, 4, 1, -1)^T - \frac{1}{3}(1, 1, 2, 3)^T = (-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{10}{3}, -2)^T.$$

再经过单位化，得到

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1, 1, 2, 3)^T, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{39}}(-2, 1, 5, -3)^T.$$

则 γ_1,γ_2 是 $BX=0$ 解空间的一个标准正交基.

习题

1. 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 n 维内积空间 V 的一组标准正交基， $\alpha = a_1\xi_1+a_2\xi_2+\cdots+a_n\xi_n$, $\beta=b_1\xi_1+b_2\xi_2+\cdots+b_n\xi_n$, 则

$$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

2. 已知 $\alpha_1=(0,2,1,0)$, $\alpha_2=(1,-1,0,0)$, $\alpha_3=(1,2,0,-1)$, $\alpha_4=(1,0,0,1)$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 的一个基. 对这个基做 Schimidt 正交化，求 $\mathbb{R}^4$ 的一个标准正交基.

3. 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_3+x_4=0 \\ x_2-x_4=0 \end{cases}$$

的解空间的标准正交基，并求与解空间正交的所有向量.

4. 设 V_1,V_2 是 n 维欧氏空间 V 的子空间.
(1) $(V_1^{\perp})^{\perp}=V_1$;
(2) $V_1\subseteq V_2$, 则 $V_2^{\perp}\subseteq V_1^{\perp}$;
(3) $(V_1+V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$;
(4) $(V_1\cap V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}+V_2^{\perp}$.

5. (1) 实对角阵是正交阵，则其对角元为 ±1;
(2) 上 (下) 三角阵是正交阵，则其为对角阵且对角元为 ±1;
(3) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交阵且二阶矩阵能作为正交阵的只能是如上两种形式.

6. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 n 维内积空间 V 中的非零正交向量组， α 是 V 中的任一向量，证明下面的 (Bessel **不等式**)

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{|(\alpha,\alpha_k)|^2}{|\alpha_k|^2}\le|\alpha|^2;$$

且等号成立的充分必要条件是

$$\alpha\in\mathrm{span}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m).$$