第八章　欧氏空间

§8.1 欧氏空间，长度，夹角

定义 8.1.1 设 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 映射 $(-,-): V\times V\to\mathbb{R}$ 称为 **内积**, 如果对于任意的 $\alpha,\beta,\gamma\in V$, $c\in\mathbb{R}$, 都有

(1) $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$;

(2) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$;

(3) $(c\alpha,\beta)=c(\alpha,\beta)$;

(4) $(\alpha,\alpha)\geq 0$ 且等号成立的充要条件是 $\alpha=0$.

同时称 V 为关于内积 $(-,-)$ 的 **欧几里得** (Euclid) **空间**, 简称 **欧氏空间**.

例 1 在实数域上的 n 维列向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 对于 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T\in\mathbb{R}^n$, 定义

$$(X,Y)=X^TY=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

易见, $(-,-)$ 是一个内积. $\mathbb{R}^n$ 对于以上定义的内积构成欧氏空间.

例 2 在实数域上的 n 维列向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 对于 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T\in\mathbb{R}^n$, 定义

$$(X,Y)=x_1y_1+2x_2y_2+\cdots+nx_ny_n$$

易见, $\mathbb{R}^n$ 对于以上定义的内积也构成欧氏空间.

对于同一个线性空间, 对于不同的内积构成不同的欧氏空间. 今后如无特别说明, 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 总指对于例 1 中的内积构成的欧氏空间.

例 3 设 $C[a,b]$ 是 $\mathbb{R}$ 的闭区间 $[a,b]$ 上连续函数全体构成的线性空间. 对于 $f(x),g(x)\in C[a,b]$, 定义

$$(f(x),g(x))=\int_a^b f(x)g(x)dx.$$

不难验证这定义了一个内积, 在此内积下, $C[a,b]$ 成为欧氏空间.

命题 8.1.1 设 V 对于内积 $(-,-)$ 的欧氏空间. 则对于任意的 $\alpha\in V$, $\alpha_i\in V$, $a_i\in\mathbb{R}$, $1\leq i\leq m$, $\beta_j\in V$, $b_j\in\mathbb{R}$, $1\leq j\leq n$, 总有

(1) $(0,\alpha)=0$;

(2) $(\sum_{i=1}^m a_i\alpha_i,\sum_{j=1}^n b_j\beta_j)=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_ib_j(\alpha_i,\beta_j)$.

证明 利用内积的定义直接验证. □

定义 8.1.2 设 V 是欧氏空间, $\alpha\in V$. 定义 α 的 **长度** (**或范数**) 为 $\sqrt{(\alpha,\alpha)}$, 记为 $|\alpha|$.

在欧氏空间中, 只有零向量的长度为 0. 其余向量的长度为正数. 对于 $\alpha\in V$, $c\in\mathbb{R}$, 总有

$$|c\alpha|=|c||\alpha|.$$

长度为 1 的向量称为 **单位向量**. 对于任意非零向量 α, $\frac{\alpha}{|\alpha|}$ 是单位向量. 从 α 得到单位向量 $\frac{\alpha}{|\alpha|}$ 的过程，称为将 α**单位化**.

例 4 在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中，向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 的长度是

$$\sqrt{(X,X)}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}.$$

定理 9.1.1 (Cauchy-Schwarz **不等式**) 设 V 是欧氏空间，对于任意的 $\alpha,\beta\in V$, 总有

$$(\alpha,\beta)^2\leq(\alpha,\alpha)(\beta,\beta).$$

当且仅当 α,β 线性相关时，等号成立.

证明 若 $\alpha=0$, 则左右两式均等零，等号成立.
若 $\alpha\neq 0$, 考虑向量 $\beta-\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$. 因为

$$0\leq(\beta-\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha,\beta-\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha)=(\beta,\beta)-2(\beta,\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha)+\frac{(\alpha,\beta)^2}{(\alpha,\alpha)^2}(\alpha,\alpha)=(\beta,\beta)-\frac{(\alpha,\beta)^2}{(\alpha,\alpha)}.$$

所以

$$(\alpha,\beta)^2\leq(\alpha,\alpha)(\beta,\beta).$$

显然，当且仅当 $\alpha=0$ 或 $\beta-\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha=0$ 时等式成立. 即当且仅当 α,β 线性相关时，等号成立. □

例 5 对于任意的实数 x_i,y_i, $1\leq i\leq n$, 总有

$$(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2\leq(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2).$$

例 6 对于 $f(x),g(x)\in C[a,b]$, 总有

$$(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2\leq\int_a^b f(x)^2dx\int_a^b g(x)^2dx.$$

因为 $|(\alpha,\beta)|\leq|\alpha||\beta|$, 所以 $-1\leq\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$. 故下面对于两个向量的夹角的定义式合理的.

定义 8.1.3 在欧氏空间 V 中，定义非零向量 α,β 的 **夹角**θ 由以下式子决定

$$\cos\theta=\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}.$$

这样，欧氏空间的任意两个非零向量都有夹角 θ, $0\leq\theta\leq\pi$.

定义 8.1.4 在欧氏空间 V 中，两个向量 α,β 称为 **正交**, 如果

$$(\alpha,\beta)=0.$$

只有零向量和自己正交. 在 $\mathbb{R}^n$ 中， ε_i, $1\leq i\leq n$, 两两正交.

命题 8.1.2 在欧氏空间 V 中，如果 α 与每个 α_i 正交， $1\leq i\leq n$, 则 α 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的任意线性组合都正交.

证明 显然. $\square$

例 6 在 $\mathbb{R}^4$ 中, 求一单位向量与 $\alpha_1=(1,1,-1,1)^T$, $\alpha_2=(1,-1,-1,1)^T$, $\alpha_3=(2,1,1,3)^T$ 均正交.

解 设 $\beta=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 正交, 则有

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2-x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2+x_3+3x_4=0 \end{cases}$$

解之, 得到 $x_1=\frac{4}{3}x_4$, $x_2=0$, $x_3=-\frac{1}{3}x_4$. 又 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1$, 解之, 得到 $x_4=\pm\frac{3}{\sqrt{26}}$. 当 $x_4=\frac{3}{\sqrt{26}}$ 时, $x_1=\frac{4}{\sqrt{26}}$, $x_2=0$, $x_3=-\frac{1}{\sqrt{26}}$; 当 $x_4=-\frac{3}{\sqrt{26}}$ 时, $x_1=-\frac{4}{\sqrt{26}}$, $x_2=0$, $x_3=\frac{1}{\sqrt{26}}$. 所以

$$\beta=\pm(\frac{4}{\sqrt{26}},0,-\frac{1}{\sqrt{26}},\frac{3}{\sqrt{26}})^T.$$

习题

1. 求证: 对于欧氏空间 V 中的任意向量 α,β, 有
(1) $|\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|^2=2|\alpha|^2+2|\beta|^2$;
(2) $(\alpha,\beta)=\frac{1}{4}|\alpha+\beta|^2-\frac{1}{4}|\alpha-\beta|^2$.

2. (三角不等式) 设 V 是欧氏空间, 对于任意的 $\alpha,\beta\in V$, 总有

$$|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|.$$

3. 在 $\mathbb{R}^4$ 中, 求 α,β 的夹角.
(1) $\alpha=(2,1,3,2),\beta=(1,2,-2,1)$;
(2) $\alpha=(1,1,1,1),\beta=(0,1,0,0)$.

4. 在欧氏空间 V 中, 定义两个向量 α,β 的距离为 $d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|$. 求证
(1) 当 $\alpha\ne\beta$ 时, $d(\alpha,\beta)>0$;
(2) $d(\alpha,\beta)=d(\beta,\alpha)$;
(3) $d(\alpha,\beta)\le d(\alpha,\gamma)+d(\gamma,\beta)$.

5. 在 $\mathbb{R}^4$ 中, 求与向量 $\beta=(1,-1,-1,1),\gamma=(2,1,1,3)$ 正交的所有向量.

6. 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的一个基, 证明:
(1) 如果 $\alpha\in V$ 使得 $(\alpha,\alpha_i)=0$, $1\le i\le n$, 那么 $\alpha=0$;
(2) 如果 $\alpha_1,\alpha_2\in V$ 使得 $(\alpha_1,\alpha_i)=(\alpha_2,\alpha_i)$, $1\le i\le n$, 那么 $\alpha_1=\alpha_2$.