

第三届全国大学生数学竞赛数学类预赛试卷
(数学类, 2011)

一. (本题 15 分) 已知四点 $A(1, 2, 7), B(4, 3, 3), C(5, -1, 6), D(\sqrt{7}, \sqrt{7}, 0)$. 试求过这四点的球面方程.

二. (本题 10 分) 设 $f_1, f_2, \dots, f_n$ 为 $[0, 1]$ 上的非负连续函数. 求证: 存在 $\xi \in [0, 1]$, 使得

$$\prod_{k=1}^n f_k(\xi) \leq \prod_{k=1}^n \int_0^1 f_k(x) dx.$$

三. (本题 15 分) 设 F^n 是数域 F 上的 n 维列空间, $\sigma: F^n \rightarrow F^n$ 是一个线性变换. 若 $\forall A \in M_n(F), \sigma(A\alpha) = A\sigma(\alpha), (\forall \alpha \in V)$, 证明: $\sigma = \lambda \cdot \text{id}_{F^n}$, 其中 λ 是 F 中某个数, id_{F^n} 表示恒同变换.

四. (本题 10 分) 对于 $\triangle ABC$, 求 $3\sin A + 4\sin B + 18\sin C$ 的最大值.

五. (本题 15 分) 对于任何实数 α , 求证存在取值于 $\{-1, 1\}$ 的数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{n + a_k} - n^{\frac{3}{2}} \right) = \alpha.$$

六. (本题 20 分) 设 A 是数域 F 上的 n 阶方阵. 证明 A 相似于 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, 其中 B 是可逆矩阵, C 是幂等阵, 即存在 m 使得 $C^m = 0$.

七. (本题 15 分) 设 $F(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上单调递减函数, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} F(t) \sin \frac{t}{n} dt = 0$. 证明:

(i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = 0$, (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} F(t) \sin(xt) dt = 0$.