

第二届中国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案 (数学类)

一、(10分) 设 $\varepsilon \in (0, 1)$, $x_0 = a$, $x_{n+1} = a + \varepsilon \sin x_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). 证明:
 $\xi = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在, 且 ξ 为方程 $x - \varepsilon \sin x = a$ 的唯一根.

证明: 注意到 $|(\sin x)'| = |\cos x| \leq 1$, 由中值定理, 我们有

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

.....(2 分)

所以

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = |\varepsilon(\sin x_{n+1} - \sin x_n)| \leq \varepsilon |x_{n+1} - x_n|, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

.....(4 分)

从而可得

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon^n |x_1 - x_0|, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

于是级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ 绝对收敛, 从而 $\xi = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在.

.....(6 分)

对于递推式 $x_{n+1} = a + \varepsilon \sin x_n$ 两边取极限即得 ξ 为 $x - \varepsilon \sin x = a$ 的根.

.....(8 分)

进一步, 设 η 也是 $x - \varepsilon \sin x = a$, 即 $\eta - \varepsilon \sin \eta = a$ 的根, 则

$$|\xi - \eta| = \varepsilon |\sin \xi - \sin \eta| \leq \varepsilon |\xi - \eta|.$$

所以由 $\varepsilon \in (0, 1)$ 可得 $\eta = \xi$. 即 $x - \varepsilon \sin x = a$ 的根唯一. 证毕

.....(10 分)

□

二、(15 分) 设 $B = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 30 \\ 0 & 0 & 2010 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 证明 $X^2 = B$ 无解, 这里 X 为三阶未知复方阵.

证明: 反证法. 设方程有解, 即存在复矩阵 A 使得 $A^2 = B$.

.....(2 分)

我们注意到 B 的特征值为 0, 且其代数重数为 3.

.....(4 分)

设 λ 为 A 的一个特征值, 则 λ^2 为 B 的特征值. 所以 $\lambda = 0$. 从而 A 的特征值均为 0.

.....(6 分)

于是 A 的 Jordan 标准型只可能为 $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 或

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

.....(10 分)

从而 A^2 的 Jordan 标准型只能为 $J_1 = J_1^2 = J_2^2$ 或 $J_2 = J_3^2$.

.....(12 分)

因此 A^2 的秩不大于 1, 与 $B = A^2$ 的秩为 2 矛盾.

所以 $X^2 = B$ 无解. 证毕.

.....(15 分)

□

三、(10 分) 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是凸区域, 函数 $f(x, y)$ 是凸函数. 证明或否定: $f(x, y)$ 在 D 上连续.

注: 函数 $f(x, y)$ 为凸函数的定义是 $\forall \alpha \in (0, 1)$ 以及 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$, 成立

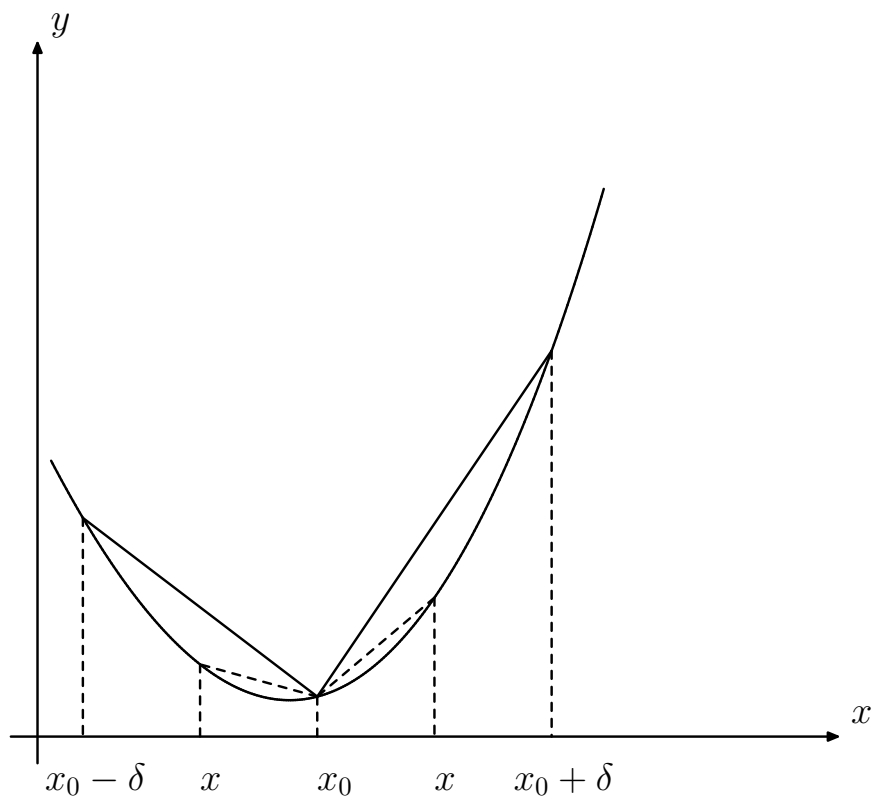
$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, \alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2) \leq \alpha f(x_1, y_1) + (1 - \alpha)f(x_2, y_2).$$

证明: 结论成立. 我们分两步证明结论.

(i) 对于 $\delta > 0$ 以及 $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ 上的一元凸函数 $g(x)$, 容易验证 $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$:

$$\frac{g(x_0) - g(x_0 - \delta)}{\delta} \leq \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{g(x_0 + \delta) - g(x_0)}{\delta}.$$

.....(2 分)



从而

$$\left| \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right| \leq \left| \frac{g(x_0 + \delta) - g(x_0)}{\delta} \right| + \left| \frac{g(x_0) - g(x_0 - \delta)}{\delta} \right|, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

由此即得 $g(x)$ 在 x_0 连续. 一般地, 可得开区间上的一元凸函数连续.

.....(4 分)

(ii) 设 $(x_0, y_0) \in D$. 则有 $\delta > 0$ 使得

$$E_\delta \equiv [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \subset D.$$

.....(5 分)

注意到固定 x 或 y 时, $f(x, y)$ 作为一元函数都是凸函数, 由 (i) 的结论, $f(x, y_0), f(x, y_0 + \delta), f(x, y_0 - \delta)$ 都是 $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ 上的连续函数, 从而它们有界, 即存在常数 $M_\delta > 0$ 使得

$$\begin{aligned} & \frac{|f(x, y_0 + \delta) - f(x, y_0)|}{\delta} + \frac{|f(x, y_0) - f(x, y_0 - \delta)|}{\delta} \\ & + \frac{|f(x_0 + \delta, y_0) - f(x_0, y_0)|}{\delta} + \frac{|f(x_0, y_0) - f(x_0 - \delta, y_0)|}{\delta} \\ & \leq M_\delta, \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]. \end{aligned}$$

.....(7 分)

进一步, 由 (i) 的结论, 对于 $(x, y) \in E_\delta$,

$$\begin{aligned} & |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \\ & \leq |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| \\ & \leq \left(\frac{|f(x, y_0 + \delta) - f(x, y_0)|}{\delta} + \frac{|f(x, y_0) - f(x, y_0 - \delta)|}{\delta} \right) |y - y_0| \\ & \quad + \left(\frac{|f(x_0 + \delta, y_0) - f(x_0, y_0)|}{\delta} + \frac{|f(x_0, y_0) - f(x_0 - \delta, y_0)|}{\delta} \right) |x - x_0| \\ & \leq M_\delta |y - y_0| + M_\delta |x - x_0|. \end{aligned}$$

于是 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续. 证毕.

.....(10 分)

□

四、(10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上 Riemann 可积, 在 $x = 1$ 可导, $f(1) = 0$, $f'(1) = a$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \int_0^1 x^n f(x) dx = -a.$$

证明: 记 $M = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| < +\infty$. 令 $r(x) = f(x) - f(1) - f'(1)(x - 1) = f(x) - a(x - 1)$. 则由 Peano 型的 Taylor 展式可得 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in (0, 1)$, 使得当 $\delta < x \leq 1$ 时,

$$|r(x)| \leq \varepsilon(1 - x).$$

.....(2 分)

我们有

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^n f(x) dx &= \int_0^\delta x^n f(x) dx + \int_\delta^1 a x^n (x - 1) dx + \int_\delta^1 x^n r(x) dx \\ &= R_1 + R_2 + R_3. \end{aligned}$$

.....(4 分)

注意到

$$\begin{aligned} |R_1| &\leq M \int_0^\delta x^n dx = M \frac{\delta^{n+1}}{n+1}, \\ R_2 &= -\frac{a}{(n+1)(n+2)} + a \left(\frac{\delta^{n+1}}{n+1} - \frac{\delta^{n+2}}{n+2} \right) \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}|R_3| &\leq \int_{\delta}^1 x^n |r(x)| dx \leq \varepsilon \int_{\delta}^1 x^n (1-x) dx \\ &\leq \varepsilon \int_0^1 x^n (1-x) dx = \frac{\varepsilon}{(n+1)(n+2)},\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} |n^2 R_1| &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} |n^2 R_2 + a| &= 0\end{aligned}$$

以及

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |n^2 R_3| \leq \varepsilon.$$

.....(8 分)

所以

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| n^2 \int_0^1 x^n f(x) dx + a \right| \leq \varepsilon.$$

由上式及 $\varepsilon > 0$ 的任意性即得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \int_0^1 x^n f(x) dx = -a.$$

证毕.

.....(10 分)

□

五、(15 分) 已知二次曲面 Σ (非退化)过以下九点: $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 2)$, $C(1, -1, -2)$, $D(3, 0, 0)$, $E(3, 1, 2)$, $F(3, -2, -4)$, $G(0, 1, 4)$, $H(3, -1, -2)$, $I(5, 2\sqrt{2}, 8)$.
问 Σ 是哪一类曲面?

解答: 易见, A 、 B 、 C 共线, D 、 E 、 F 共线.

.....(6 分)

而只有两种二次曲面上可能存在共线的三点: 单叶双曲面和双曲抛物面.

.....(10 分)

然后, 可以看到直线 ABC 和直线 DEF 是平行的, 且不是同一条直线.

.....(12 分)

这就又排除了双曲抛物面的可能(双曲抛物面的 同族直母线都异面, 不同族直母线都相交), 所以只可能是单叶双曲面.

.....(15 分)

注: 这个曲面其实是(不要求学生写出方程式)

$$(x-2)^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1.$$

六、(20 分) 设 A 为 $n \times n$ 实矩阵(未必对称), 对任一 n 维实向量 $\alpha \equiv (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha A \alpha^\top \geq 0$ (这里 $\alpha^\top$ 表示 α 的转置), 且存在 n 维实向量 β , 使得 $\beta A \beta^\top = 0$, 同时对任意 n 维实向量 x 和 y , 当 $x A y^\top \neq 0$ 时有 $x A y^\top + y A x^\top \neq 0$. 证明: 对任意 n 维实向量 v , 都有 $v A \beta^\top = 0$.

证明: 取任意实数 r , 由题设知

$$(v + r\beta)A(v + r\beta)^\top \geq 0.$$

.....(8 分)

即

$$v A v^\top + r v A \beta^\top + r \beta A v^\top + r^2 \beta A \beta^\top \geq 0.$$

.....(12 分)

亦即

$$v A v^\top + r(v A \beta^\top + \beta A v^\top) + r^2 \beta A \beta^\top \geq 0.$$

.....(14 分)

若 $v A \beta^\top \neq 0$, 则有 $v A \beta^\top + \beta A v^\top \neq 0$. 因此可取适当的实数 r 使得

$$v A v^\top + r(v A \beta^\top + \beta A v^\top) + r^2 \beta A \beta^\top < 0.$$

盾. 证毕.

.....(20 分)

□

七、(10 分) 设 f 在区间 $[0, 1]$ 上 Riemann 可积, $0 \leq f \leq 1$. 求证: 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在只取值 0, 1 的分段(段数有限)常值函数 $g(x)$, 使得 $\forall [\alpha, \beta] \subseteq [0, 1]$,

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx \right| < \varepsilon.$$

证明: 取定 $n > \frac{2}{\varepsilon}$. 定义 $A_m = \left[\frac{m}{n}, \frac{m}{n} + \int_{\frac{m}{n}}^{\frac{m+1}{n}} f(t) dt \right)$,

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \bigcup_{m=0}^{n-1} A_m, \\ 0, & x \notin \bigcup_{m=0}^{n-1} A_m. \end{cases}$$

.....(5 分)

对于 $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$, 设非负整数 $k \leq \ell$ 满足 $\frac{k}{n} \leq \alpha < \frac{k+1}{n}$, $\frac{\ell}{n} \leq \beta < \frac{\ell+1}{n}$, 则

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx \right| \\ & \leq \int_{\alpha}^{\frac{k+1}{n}} |f(x) - g(x)| dx + \left| \int_{\frac{k+1}{n}}^{\frac{\ell}{n}} (f(x) - g(x)) dx \right| + \int_{\frac{\ell}{n}}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx \\ & \leq \int_{\alpha}^{\frac{k+1}{n}} 1 dx + 0 + \int_{\frac{\ell}{n}}^{\beta} 1 dx \\ & \leq \frac{2}{n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

证毕.

.....(10 分)

□

八、(10 分) 已知 $\varphi: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ 是一个严格单调下降的连续函数, 满足

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = +\infty.$$

若

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = \int_0^{+\infty} \varphi^{-1}(t) dt = a < +\infty,$$

其中 φ^{-1} 表示 φ 的反函数. 求证:

$$\int_0^{+\infty} [\varphi(t)]^2 dt + \int_0^{+\infty} [\varphi^{-1}(t)]^2 dt \geq \frac{1}{2} a^{\frac{3}{2}}.$$

证明: 令 $P = \int_p^{+\infty} \varphi(t) dt$, $Q = \int_q^{+\infty} \varphi^{-1}(t) dt$, $I = a - P - Q$, 其中 $pq = a$.

.....(2 分)

则

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \left(\varphi^{-1}(t) \right)^2 dt \geq \int_0^q \left(\varphi^{-1}(t) \right)^2 dt \\ \geq & \frac{1}{q} \left(\int_0^q \varphi^{-1}(t) dt \right)^2 = \frac{1}{q} (a - Q)^2 = \frac{1}{q} (I + P)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \left(\varphi(t) \right)^2 dt \geq \int_0^p \left(\varphi(t) \right)^2 dt \\ \geq & \frac{1}{p} \left(\int_0^p \varphi(t) dt \right)^2 = \frac{1}{p} (a - P)^2 = \frac{1}{p} (I + Q)^2. \end{aligned}$$

.....(6 分)

因此,

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \left(\varphi(t) \right)^2 dt + \int_0^{+\infty} \left(\varphi^{-1}(t) \right)^2 dt \\ \geq & \frac{1}{p} (I + Q)^2 + \frac{1}{q} (I + P)^2 \\ \geq & \frac{2}{\sqrt{pq}} (I + P)(I + Q) = \frac{2}{\sqrt{a}} (QP + aI). \end{aligned}$$

.....(8 分)

易见可取到适当的 p, q 满足 $P = Q = \frac{a - I}{2}$, 从而

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \left(\varphi(t) \right)^2 dt + \int_0^{+\infty} \left(\varphi^{-1}(t) \right)^2 dt \\ \geq & \frac{1}{a} \left(\frac{(a - I)^2}{4} I + aI \right) = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{(a + I)^2}{4} \geq \frac{1}{2} a^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

证毕.

.....(10 分)

□