竞赛之窗

陕西省第六次大学生高等数学竞赛本科组初赛试题

一、填空题：$(6\times 4' = 24')$

1. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{|x|} - 2[x]\right) = \underline{\ 1\ }$.

2. $\dfrac{d^4}{dx^4}\left(\dfrac{2+x}{1-x^2}\right)\Big|_{x=0} = \underline{\ 48\ }$.

3. 设函数 $f(x,y)$ 可微，$f(0,0)=0$，$f_x(0,0)=m$，$f_y(0,0)=n$，$\varphi(t)=f[t,f(t,t)]$，则 $\varphi'(0)=\underline{\ m+mn+n^2\ }$.

4. 设 $\dfrac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^{2} f(2t)\,dt = \sqrt{x}\ (x>0)$，则 $\int f(x)\,dx = \underline{-\dfrac{1}{6}x^3 + c}$.

5. 设 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上连续，且满足 $f(x-\pi) = -f(x)$，则 $f(x)$ 的傅立叶系数 $a_{2n} = \underline{\ 0\ }$.

6. 设质点在变力 $F=(3x+4y)i+(7x-y)j$ 的作用下，沿椭圆 $ax^2+y^2=4$ 的逆时针方向运动一周所作的功等于 6π，则 $a = \underline{\ 4\ }$.

二、选择题 $(8\times 4' = 32')$

7. 当 $x\to 0$ 时，下列无穷小量中最高阶的无穷小量是 (D)

A. $\int_0^x \ln(1+t^{3/2})\,dt$；　B. $\tan x - \sin x$；

C. $\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\,dt$；　D. $\int_0^{1-\cos x}(\sin t)^{3/2}\,dt$.

8. 设 $I_1=\int_{-1}^{1}\dfrac{x}{\sin x}dx$，$I_2=\int_{-1}^{1}\dfrac{x^2}{\sin x}dx$，$I_3=\int_{-1}^{1}\dfrac{x}{\tan x}dx$，则 (A)

A. $I_2<I_3<I_1$；　B. $I_2<I_1<I_3$；

C. $I_1<I_2<I_3$；　D. $I_1<I_3<I_2$.

9. 下列级数中条件收敛的是 (D)

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^3+1}}$；　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{2n-1}$；

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n}$；　D. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\ln n}$.

10. 设 $x\to 0$ 时，$e^{x\cos x^2} - e^x \sim kx^n$，则 (C)

A. $n=4, k=-\dfrac{1}{2}$；　B. $n=4, k=\dfrac{1}{2}$；

C. $n=5, k=-\dfrac{1}{2}$；　D. $n=5, k=\dfrac{1}{2}$.

11. 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处 (C)

A. 两个一阶偏导数不存在；

B. 不可微，但两个一阶偏导数存在；

C. 可微，但两个一阶偏导数不连续；

D. 两个一阶偏导数连续.

12. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内有二阶连续导数，且 $f''(x)\neq 0$，则 (D)

A. 若 $\lim\limits_{x\to a^+}f'(x)=+\infty$，则 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty$；

B. 若 $\lim\limits_{x\to b^-}f'(x)=+\infty$，则 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=+\infty$；

C. 若 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty$，则 $\lim\limits_{x\to a^+}f'(x)=+\infty$；

D. 若 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=+\infty$，则 $\lim\limits_{x\to b^-}f'(x)=+\infty$.

13. 设 $f(t)=\oiint_{\Sigma_t}(x+t)^2dydz+(y+t)^2dzdx+(z+t)^2dxdy$，其中积分曲面 $\Sigma_t: x^2+y^2+z^2=t^2, t>0$，取外侧，则 $f'(t)=$ (D)

A. 0；　B. $8\pi t^3$；　C. $16\pi t^3$；　D. $32\pi t^3$.

14. 已知函数 $f(x)$ 具有三阶导数，且 $f''(0)\neq 0$，又 $f(0)=-2$ 是 $f(x)$ 极小值. 函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y'-2y=f(x)$ 的满足初始条件 $y(0)=1$ 的解，则 (C)

A. 1 是 $y(x)$ 的极小值；B. 1 是 $y(x)$ 的极大值；

C. $(0,1)$ 是曲线 $y=y(x)$ 的拐点；

D. 1 不是 $y(x)$ 的极值，$(0,1)$ 也不是曲线 $y=y(x)$ 的拐点.

三、解答题

15. (12 分) 设 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 有极值点 $x=-1$ 和 $x=2$，且 $f'(0)=-2$，曲线 $y=f(x)$ 的拐点为 $(\tau,-1)$. 求此曲线过 $(\tau,-1)$ 点的切线方程. $\underline{\left(y=-\dfrac{9}{4}x+\dfrac{1}{8}\right)}$

16. (12 分) 求 $\int_0^1 \arcsin x\arccos x\,dx$. $\underline{\left(-\dfrac{\pi}{2}+2\right)}$

17. (12 分) 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln^2 x$，求 $\int xf''(2x)\,dx$. $\underline{\left(\dfrac{2-4\ln(2x)}{8x}+c\right)}$

18. (10 分) 就实数 a 的取值，讨论方程 $e^x = ax - e^2$ 的实根个数及其所在区间. $\underline{(a=0\text{ 时无实根 } a<0 \text{ 时有}}$

唯一负根；$a>0$ 时有两实根，分别在 $(0,2)$ 与 $(2,+\infty)$ 内）

19.（10分）设曲面 S 的方程为 $z=\sqrt{4+x^2+4y^2}$，平面 π 的方程为 $x+2y+2z-2=0$. 试在曲面 S 上求一点，使该点与平面 π 的距离为最近，并求此最近距离.（$(-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},2\sqrt{2})$，$\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)$）

20.（10分）设 $\left(\frac{ye^{-x}}{x}f(x)-\frac{2}{x^2}\right)dx+\left(e^{-x}f(x)-\frac{4}{y^2}\right)dy$ 是函数 $u(x,y)$ 的全微分，其中 $f'(x)$ 连续且 $f(1)=e$，$u(1,1)=0$. 求 $u(x,y)$ 并计算积分

$$\int_{(1,1)}^{(1,2)}\left(\frac{ye^{-x}}{x}f(x)-\frac{2}{x^2}\right)dx+\left(e^{-x}f(x)-\frac{4}{y^2}\right)dy.$$

（$u(x,y)=xy+\frac{2}{x}+\frac{4}{y}-7$，1）

21.（10分）计算二重积分 $I=\iint_D(ax^2+by^2)d\sigma$，其中 D 是圆域 $x^2+y^2\leqslant 2y$.（$\frac{1}{4}(a+5b)\pi$）

22.（9分）求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ 的收敛域及和函数.

（$(-\infty,+\infty)$，$y=\frac{1}{4}(e^x+e^{-x}+2\cos x)$）

23.（9分）陨石高速坠落时，与大气摩擦而产生极高温度，致使其质量不断挥发. 由试验知挥发速度与陨石的表面积成正比. 假设某陨石为质量分布均匀的球体，刚进入大气层时的质量为 m_0，在 T 时刻落到地面，其质量为 m_T. 试求此陨石的质量 m 关于时间 t 的函数.

（$m(t)=[\sqrt[3]{m_0}+(\sqrt[3]{m_T}-\sqrt[3]{m_0})\frac{t}{T}]^3$）

（上接第36页）

例3　求不定积分 $\int\frac{\cos x}{\cos x+2\sin x}dx$.

解 $\because \cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$，　　$\cos x+2\sin x=\sqrt{5}\sin(x+\alpha)$，

其中 $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$，

$$\therefore \text{原式}=\int\frac{\sin(x+\frac{\pi}{2})}{\sqrt{5}\sin(x+\alpha)}dx=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{\sin[(x+\alpha)+(\frac{\pi}{2}-\alpha)]}{\sin(x+\alpha)}dx=\frac{1}{\sqrt{5}}\int[\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)+\frac{\cos(x+\alpha)}{\sin(x+\alpha)}\cdot\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)]dx=\frac{1}{\sqrt{5}}\int[\sin\alpha+\cos\alpha\cdot\frac{\cos(x+\alpha)}{\sin(x+\alpha)}]dx=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{5}}\cdot x+\frac{\cos}{\sqrt{5}}\ln|\sin(x+\alpha)|+D=\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}\ln\left|\frac{\cos x+2\sin x}{\sqrt{5}}\right|+D=\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}\ln|\cos x+2\sin x|+C$$

（其中 $C=D-\frac{2}{5}\ln\sqrt{5}$）

例4　求不定积分 $\int\frac{3\sin x+5\cos x}{\sin x-7\cos x}dx$.

解　由公式(3)可得：

$$\int\frac{3\sin x+5\cos x}{\sin x-7\cos x}dx=\frac{3\times1+5\times(-7)}{1^2+(-7)^2}+\frac{5\times1-3\times(-7)}{1^2+(-7)^2}\ln|\sin x-7\cos x|+C=-\frac{16}{25}x+\frac{13}{25}\ln|\sin x-7\cos x|+C.$$

参考文献

[1] 展丙军，李兆兴. 两类不定积分的巧解. 高等数学研究，2005，8(6)：20－24.