

南昌大学第四届高等数学竞赛（数学专业类 2004、2005 级）试卷

序号：_____ 姓名：_____ 学院：_____

专业：_____ 学号：_____ 考试日期：2007 年 9 月 16 日

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分	累分人
题分	21	10	10	13	12	8	12	14			100	签名
得分												

注：本卷共九页，八道大题，考试时间为 8:30——11:30。

一、简答题(每题 7 分，共 21 分)

得分	评阅人

1、下面的说法可以用作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的定义吗？

“ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta$ ，有 $|f(x) - A| < \varepsilon \delta$ ”。

正确的给以证明，不正确的举例说明。

2、求 $\lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}}$ ，记此极限为 $f(x)$ 。求 $f(x)$ 的间断点并指出其类型。

3、求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) x^n$ ($a, b > 0$) 的收敛半径和收敛域。

二、证明题（10 分）

得分	评阅人

设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ ($a > 0$) 内连续，且满足 Lipschitz 条件，即存在

$L > 0$ ，使得 $\forall x_1, x_2 \in [a, +\infty)$ ，有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$ ，证明 $\frac{f(x)}{x}$

在 $[a, +\infty)$ 内有界且一致连续。

三、证明题 (10 分)

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上每点处都取极值, 则 $f(x)$ 恒等于某个常数。

四、证明题 (13 分)

设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调减少, $0 < f(x) < |f'(x)|$, 则 $xf(x) > \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \in (0, 1)$ 。

五、证明题 (12 分)

设 $f_n(x) = (\sin x)^{\frac{1}{n}}$, $n = 1, 2, \dots$, 研究 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, \pi]$, $[\delta, \pi - \delta]$ ($0 < \delta < \pi$) 的一致收敛性。

六、计算题 (8 分)

$$\text{求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$$

七、计算题 (12 分)

计算 $I = \iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy$, 其中 Σ 为曲面 $z = 1 - x^2 - y^2$ ($z \geq 0$) 上侧。

八、计算题 (14 分)

$$\text{计算 } I(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin xt}{t(1+t^2)} dt$$