哈尔滨工程大学第十五届数学竞赛

考试科目: **数学竞赛(非专业高年级组)**

一	1	2	3	4	5	6	7	8
分数								
	9	10	11	12	13	14	15	总分
分数								
二	16	17						
分数								总分

一、（共15道题，每小题10分）

1. 已知对任意$x,y>0$有$f(xy)=f(x)+f(y)$且$f'(1)=1$，求$f(x)$。

2. 设$f''(0)$存在，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-xf(x)}{x^3}=1$，求 $f(0),f'(0),f''(0)$的值。

3. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n+\frac{1}{1}}+\dfrac{\ln(1+\frac{2}{n})}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\ln(1+\frac{n}{n})}{n+\frac{1}{n}}\right]$。

4. 已知$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{e^x+1}} & x<0\\ \dfrac{xe^x}{(x+1)^2} & x\geq 0\end{cases}$，求$F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt$在$x\geq -1$时的表达式。

5. 判断方程$\dfrac{1}{x-a_1}+\dfrac{1}{x-a_2}+\cdots+\dfrac{1}{x-a_n}=0(a_1<a_2<\cdots<a_n)$实根个数及分别属于的区间（注：要求写出过程）。

6. 已知区域D：$x^2+y^2\leq 1$，计算二重积分$\iint\limits_D\dfrac{(x+1)^2+xy^5}{\sqrt{1+x^2+y^2}}d\sigma$。

7. 区域$\Omega: x^2+y^2+z^2\leq 1, z\geq 0$，计算三重积分$\iiint\limits_\Omega (x+z)^2dv$。

8. 已知函数$f(u,v)$有连续的偏导，且$f(1,1)=1, f'_u(1,1)=2, f'_v(1,1)=3$，求曲面

$z = xf(2x-y, 3y-2x)$在$(1,1,1)$点处沿xoy平面上曲线$x^2+2y^2=3$在$(1,1)$点外法线方向上的方向导数。

9. 设$f(x)$在$[-1,1]$上有连续的三阶导数,且$f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$. 证明：$\exists\xi\in(-1,1)$，使$f'''(\xi)=3$.

10. 设$f(x)$在$\left[a,b\right]$上一阶可导，在$\left(a,b\right)$内二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，$f'(a)f'(b)>0$，证明：

（1）$\exists\xi\in(a,b)$，使$f(\xi)=0$；

（2）$\exists\eta\in(a,b)$，使$f''(\eta)=f(\eta)$。

11. 已知$A(1,0,0)$与$B(0,1,1)$，线段AB绕z轴旋转一周所围成的旋转曲面为s. 求由s及两平面$z=0, z=1$所围的立体体积。

12. 已知L为$y=16-x^4$上从$A(-2,0)$到$B(2,0)$顺时针的一段，计算曲线积分$I=\int_L \frac{ydx-(x-1)dy}{3(x-1)^2+4y^2}$。

13. 求函数$z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$的极值。

14. 计算$\iint_\Sigma |x|y^2zdydz+xy^3zdzdx+|y|xz^2dxdy$，其中$\Sigma$为曲面$z=x^2+y^2$（$z\le 1$部分）的外侧。

15. 已知封闭曲面S的方程为：$|x|+|y|+|z|=1$，其面密度函数$\rho=|x|+|z|+\frac{1}{3}z$，求曲面$S$的重心。

二、附加题（共2道题，每小题15分，注：附加题不计入总分，仅在前15题所得总分相同时，名次由附加题决定）

16. 求微分方程$y''+(e^y-4x)y'^3=0$的通解。

17. 设$I_n=\int_0^1 \frac{x^n e^x}{e^x+1}dx$，

（1） 求$\lim\limits_{n\to\infty} I_n$；

（2） 讨论$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^\alpha I_n$敛散性。