2008 年湖南省大学生数学竞赛试题（数学专业类）

1．计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\tan x}{x}$ 。

2．设 $f(x)=\begin{cases}x^2\arctan\dfrac{y}{x}-y^2\arctan\dfrac{x}{y}, & xy\neq 0\\ 0 & xy=0\end{cases}$ ，当 $xy=0$ 时，求 $f''_{xy}(x,y)$ 。

3．计算三重积分 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}(x^2-x^2y+xy+y^2)dxdydz$ 。

4．计算第一型曲线积分 $\int_\Gamma y^2 ds$ ，其中 Γ 为下列方程组确定的曲线

$$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\ x+z=a.\end{cases}(a>0)。$$

5．设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近可微。 $f(0)=0, f'(0)=a$ 。定义数列

$$x_n=f\left(\frac{1}{n^2}\right)+f\left(\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n^2}\right)。$$

证明 $\{x_n\}$ 有极限并求其值。

6．设 $f(x)$ 是实系数多项式。

（1）证明： x_0 是 $f(x)$ 的一个重根当且仅当 $f(x_0)=f'(x_0)=0$ 。

（2）若 $2x^3+3x^2-12x+a=0$ 有重根，试确定常数 a 。

（3）设 $p(x),q(x)$ 均为多项式。证明：若 $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ 有极值，则存在常数 λ 使得 $p(x)-\lambda q(x)$ 有重根。

（4）上述逆命题是否成立？若成立，给出证明；若不成立，举出反例。

7．证明函数 $x,\sin x,e^x$ 在任意区间上是线性无关的。

8．（1）假设连续可微函数 $f(x)$ 满足微分不等式 $m\le f(x)+f'(x)\le M, x\in I$ ，其中 m,M 时常数， I 是区间。证明：存在常数 C_1,C_2 ，使得 $m+C_1e^{-x}\le f(x)\le M+C_2e^{-x}, x\in I$ 。

（2）如果二次连续可微函数 $f(x)$ 满足微分不等式 $m\le f''(x)+2f'(x)+f(x)\le M, x\in I$ ，

其中m,M时常数，I是区间。试对$f(x)$给出类似结论1的估计式（不需要证明过程）。

9．设V是数域Ω上向量空间，$\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_n$是V中一组线性无关的向量，

$$T=\left\{\sum_{i=1}^{n}a_i\mathbf{u}_i \mid \sum_{i=1}^{n}a_i=0, a_i\in\Omega\right\}$$

证明T是V的子空间，且$\dim T=n-1$。

10．设A是半正定矩阵，证明存在惟一一个半正定矩阵B使得$A=B^2$。