

2008 年湖南省大学生数学竞赛试题（非数学类）

1. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}$ 。

2. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$, 当 $xy = 0$ 时, 求 $f''_{xy}(x, y)$ 。

3. 计算二重积分 $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} (2x^2 + x^2y + x + y - y^2) dx dy$ 。

4. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ ($a > 0$) 的敛散性。

5. (1) 假设连续可微函数 $f(x)$ 满足微分不等式 $m \leq f(x) + f'(x) \leq M, x \in I$, 其中 m, M 时常数, I 是区间。证明: 存在常数 C_1, C_2 , 使得 $m + C_1 e^{-x} \leq f(x) \leq M + C_2 e^{-x}, x \in I$ 。

(2) 如果二次连续可微函数 $f(x)$ 满足微分不等式 $m \leq f''(x) + 2f'(x) + f(x) \leq M, x \in I$,

其中 m, M 时常数, I 是区间。试对 $f(x)$ 给出类似结论 1 的估计式 (不需要证明过程)。

6. 设有一小山, 取它的底面所在的平面为 Oxy 坐标面, 其底部所占的区域为 $D = \{(x, y) | x^2 - xy + y^2 \leq 75\}$, 小山的高度函数为 $h(x, y) = 75 - x^2 + xy - y^2$ 。

(1) 设 $M(x_0, y_0)$ 为区域 D 上一点, 问 $h(x, y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大? 若记此方向导数的最大值为 $g(x_0, y_0)$, 试写出 $g(x_0, y_0)$ 的表达式。

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动, 为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点。也就是说, 要在 D 的边界线 $x^2 - xy + y^2 = 75$ 上找出使得 (1) 中的 $g(x, y)$ 达到最大的点。试确定攀登起点的位置。

7. 设 $f(x)$ 是实系数多项式。称 x_0 是 $f(x)$ 的一个重根, 如果存在多项式 $g(x)$, 使得 $f(x) = (x - x_0)^2 g(x)$ 。

(1) 证明: x_0 是 $f(x)$ 的一个重根当且仅当 $f(x_0) = f'(x_0) = 0$ 。

(2) 若 $2x^3 + 3x^2 - 12x + a = 0$ 有重根, 试确定常数 a 。

(3) 设 $p(x), q(x)$ 均为多项式。证明: 若 $\frac{p(x)}{q(x)}$ 有极值, 则存在常数 λ 使得 $p(x) - \lambda q(x)$ 有

重根。

(4) 上述逆命题是否成立? 若成立, 给出证明; 若不成立, 举出反例。

8. 设线性方程组 (I) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + ax_2 + 3x_3 = 0, \end{cases}$ 与 (II) $x_1 + 3x_2 + 3x_3 = a - 3$ 有公共解, 求 a 的

值和所有的公共解。

9. 设二维随机向量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 。求:

(1) (X, Y) 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$ 。

(2) $Z = 2X - Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$ 。

(3) $P\left\{Y \leq \frac{1}{2} \mid X \leq \frac{1}{2}\right\}$ 。

10. 假设总体 X 在区间 $(0, \theta)$ 上服从均匀分布 ($\theta > 0$), $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 记 $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 。

(1) 求 $X_{(n)}$ 的分布函数 $F_{(n)}(x)$ 、密度函数 $f_{(n)}(x)$; θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$, 极大似然估计量 $\hat{\theta}_2$ 。

(2) 求 C_n , 使得 $[X_{(n)}, C_n X_{(n)}]$ 是 θ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间。

(3) 若对检验问题 $H_0: \theta = 2, H_1: \theta < 2$, 取 H_0 的拒绝域 $C = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_{(n)} \leq 1.5\}$, 求犯第一类错误的概率 α 。