湖南省2007年大学生数学竞赛试题（非数学专业）

B-1. (10 分) 计算：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$，　　　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}x^n$ 的收敛半径.

B-2. (10 分) 设 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为从总体 ψ 中取出的一组样本观察值，ψ 的概率密度 $F(x)$ 是

$$F(x)=\begin{cases}\vartheta x^{\vartheta+1}, 0<x<1\\ 0, \quad\quad 其它\end{cases},\quad \vartheta>0.$$

试用最大似然估计法估计 $F(x)$ 中的未知参数 ϑ.

B-3. (10 分) 下面有两个命题，如果命题成立，请证明；如果不成立，请举例说明：

（1）实值函数 $F(x)$ 满足 $F(1)=1$，并且对于 $x\ge 1$，若

$$F'(x)=\frac{1}{x^2+F(x)^2},$$

则 $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)$ 存在，并且小于 $1+\dfrac{\pi}{4}$.

（2）实值函数 $F(x)$ 和 $G(x)$ 定义在整个实数轴上，并且满足

$$\lim_{x\to a}F(x)=p,\quad \lim_{x\to p}G(x)=q,$$

则有

$$\lim_{x\to a}G(F(x))=q.$$

B-4. (10 分) S 是 R^3 中的单位球：$x^2+y^2+z^2=1$，计算曲面积分 $\iint\limits_S(3x^2+yx^2+2z)dS$.

B-5. (10 分) 求微分方程

$$\frac{d^2F(t)}{dt^2}-2\frac{d\ F(t)}{dt}+F(t)=2e^t$$

满足初值条件 $F(0)=1$ 和 $F'(0)=0$ 的解 $F(t)$.

B-6. (10 分) 求 $A(t)=\int_0^t\sqrt{x^4+(t-t^2)^2}\,dx$ 在 $0\le t\le 1$ 中的最大值.

B-7. (10 分) 设 H 是实方阵

$$H=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

（1）求出 H 的所有的特征值和特征向量；

（2）求出一个 3 阶方阵 B，满足 $B^{-1}HB$ 是对角矩阵。

B-8. (10 分) 设 E^4 是四维实向量空间，

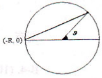
$$F=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

如果 E^4 的一个线性子空间中任何一个向量 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ 都满足 $XFX'=0$，其中 X' 是 X 的转置列向量，则该线性子空间称为类光子空间. 证明：

（1）在 E^4 中存在无穷多个一维类光子空间；

（2）在 E^4 中不存在二维类光子空间.

B-9. (10 分) 如右图，在半径为 R、圆心位于坐标原点的圆周上随机选取一点，如果该点的极角 ϑ 在区间 $[-\pi,\ \pi)$ 均匀分布，求连接所选点和圆周上点 $(-R,0)$ 的弦长的分布函数和密度函数（分布密度）.



B-10. (10 分)设 λ 是实数，$A(\lambda)$ 是函数 $(1+x)^\lambda$ 在 $x=0$ 处幂级数展开式中 x^{2008} 的系数.

（1）请写出 $A(\lambda)$ 的表达式；

（2）求积分 $\int_0^1 A(-y-1)\sum_{k=1}^{2008}\frac{1}{y+k}dy$ 的值；

（3）回答 $G(x)=\int_0^x A(-y-1)\sum_{k=1}^{2008}\frac{1}{y+k}dy$ 在实数轴上有多少个零点?请说明理由.