

一、解答下列各题 (每小题 6 分, 共 18 分)

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+(2n+1)} \right).$$

2. 设函数 $z = f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 试求常数 a 的值, 使得变换 $\begin{cases} u = x + 2y, \\ v = x + ay \end{cases}$ 可把

$$\text{方程 } 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \text{ 简化为 } \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$$

3. 已知 Σ 是椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的外侧, 计算

$$\oiint_{\Sigma} (x+1)^3 dy dz + (y+1)^3 dz dx + (z+1)^3 dx dy.$$

二、证明下列各题 (每小题 8 分, 共 16 分)

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内三阶可导, 且 $f(x)$ 和 $f'''(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界, 证明 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.
2. 设在 $(-\infty, +\infty)$ 内, 函数 $f(x)$ 连续, $g(x) = f(x) \int_0^x f(t) dt$ 单调减少, 证明: $f(x) \equiv 0$.

- 三、(10 分) 已知 $a_n = \int_{-1}^1 \frac{x^{2n}}{1+e^x} dx$, $n = 0, 1, 2, \dots$, 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ 的和.

- 四、(10 分) 设函数 $f(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, $\Omega(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2, z \geq 0\}$,

$S(t)$ 是 $\Omega(t)$ 的表面, $D(t)$ 是 $\Omega(t)$ 在 xoy 平面的投影区域, $L(t)$ 是 $D(t)$ 的边界曲线, 已

知当 $t \in (0, +\infty)$ 时, 恒有:

$$\oint_{L(t)} f(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2} ds + \oiint_{S(t)} (x^2 + y^2 + z^2) dS = \iint_{D(t)} f(x^2 + y^2) d\sigma + \iiint_{\Omega(t)} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv,$$

求 $f(t)$ 的表达式.

- 五、(10 分) 设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶对称矩阵, 求二次型函数

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j,$$

在 $\mathbb{R}^n$ 上的单位球面 $S: x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ 上的最大值与最小值.

六、(10分) 设
$$\begin{cases} x_n = 2x_{n-1} - y_{n-1}, \\ y_n = \frac{3}{2}x_{n-1} - \frac{1}{2}y_{n-1}, \end{cases}$$
 且 $x_0 = -1, y_0 = 1$, 试求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

七、(10分) 设 A, B 为 n 阶方阵, E 为 n 阶单位矩阵,

(1) 证明:
$$\begin{vmatrix} A & E \\ E & B \end{vmatrix} = |AB - E|;$$

(2) 若 $E - AB$ 可逆, 证明 $E - BA$ 也可逆.

八、(8分) 设 (X, Y) 在边长为1的正方形内服从均匀分布, 该正方形的中心在坐标原点, 对角线在坐标轴上.

(1) 求 (X, Y) 的联合密度 $f(x, y)$;

(2) 求 X 与 Y 的边缘密度 $f_X(x), f_Y(y)$;

(3) 求条件密度 $f_{Y|X}(y|x)$;

(4) 求 $D(X+Y)$.

九、(8分) 设有 A, B 两物体, 其重量 μ_1, μ_2 未知. 用一台天平对物体 A 独立称量 n_1 次, 其结果为 $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$, 用同一台天平对物体 B 独立称量 n_2 次, 结果为 $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$, 称重时, 天平有随机误差 ε , 且 $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$.

(1) 求 μ_1, μ_2 和 σ^2 的极大似然估计 $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ 和 $\hat{\sigma}^2$;

(2) 求估计量 $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ 和 $\hat{\sigma}^2$ 的均值, 它们是否为无偏估计?

(3) 设显著性水平为 α , 给出 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ vs $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ 的检验方法.