第十八届北京市大学生数学竞赛本科甲、乙组试题解答

（2007 年 10 月 14 日　　下午 2：30--5：00）

注意：本考卷共九题. 甲组九题全做, 乙组只做前七题

一、　填空题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 设当 $x\to 1$时, $1-\dfrac{m}{1+x+\cdots+x^{m-1}}$ 是 $x-1$的等价无穷小 , 则 $m=$ ______ .

解　$m=3$.

2. 设 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$, 则 $f'(1)=$ ________ .

解　$f'(1)=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$.

3. 已知曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,0)$ 处的切线在 y 轴上的截距为 -1, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}[1+f(1+\dfrac{1}{n})]^n=$ _____ .

解　$\lim\limits_{n\to\infty}[1+f(1+\dfrac{1}{n})]^n=e.$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{e^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}=$ ______ .

解　原式 $=e-1$.

5. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}\,\mathrm{d}x=$ ________.

解　原式 $=4-\pi$.

6. 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,1)$ 的某邻域内可微, 且 $f(x,y+1)=1+2x+3y+o(\rho)$, 其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，则曲面 $z=f(x,y)$ 在点$(0,1)$处的切平面方程为_____________.

解　切平面方程为 $2x+3y-z-2=0$.

7. 直线 $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ 绕 z 轴旋转的旋转曲面方程为_____________.

解　旋转转曲面方程 $x^2+y^2-z^2=1$.

8. 设L为封闭曲线 $|x|+|x+y|=1$的正向一周，则 $\oint_L x^2y^2\mathrm{d}x-\cos(x+y)\mathrm{d}y=$ ____ .

解　原式 $=0$.

9. 设向量场 $\boldsymbol{A}=2x^3yz\,\boldsymbol{i}-x^2y^2z\,\boldsymbol{j}-x^2yz^2\boldsymbol{k}$, 则其散度 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$在点$M(1,1,2)$处沿方向$\boldsymbol{l}=\{2,2,-1\}$的方向导数 $\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{l}}(\mathrm{div}\boldsymbol{A})|_M=$ ______ .

解　原式 $=\dfrac{22}{3}$.

10. 设 $y=e^{2x}+(1+x)e^{x}$是二阶常系数线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma e^{x}$的一个特解, 则 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=$ ________.

解 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=14.$

二、(10分) 设二元函数 $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$, 其中 $\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的一个邻域内连续. 试证明函数 $f(x,y)$在 $(0,0)$ 点处可微的充分必要条件是 $\varphi(0,0)=0$.

证 (必要性)设$f(x,y)$在 $(0,0)$ 点处可微, 则 $f_x'(0,0), f_y'(0,0)$存在.

由于 $f_x'(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|\varphi(x,0)}{x}$,

且 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|\varphi(x,0)}{x}=\varphi(0,0)$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|\varphi(x,0)}{x}=-\varphi(0,0)$, 故有$\varphi(0,0)=0$.

(充分性) 若$\varphi(0,0)=0$,则可知 $f_x'(0,0)=0, f_y'(0,0)=0$.因为

$\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{|x-y|\varphi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$,又 $\dfrac{|x-y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le 2$,

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{|x-y|\varphi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$. 由定义 $f(x,y)$在 $(0,0)$ 点处可微.

三、(10分) 设 $f(x)$在区间$[-1,1]$上三次可微, 证明 存在实数 $\xi\in(-1,1)$, 使得

$$\frac{f'''(\xi)}{6}=\frac{f(1)-f(-1)}{2}-f'(0).$$

证
$$f(1)=f(0)+f'(0)+\frac{f''(0)}{2!}+\frac{f'''(\xi_1)}{3!},$$
$$f(-1)=f(0)-f'(0)+\frac{f''(0)}{2!}-\frac{f'''(\xi_2)}{3!},$$
$$f(1)-f(-1)=2f'(0)+\frac{1}{6}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)].$$

由导数的介值性知存在实数$\xi\in(\xi_1,\xi_2)$, 使得 $f'''(\xi)=\dfrac{1}{2}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)]$. 于是

$$\frac{f'''(\xi)}{6}=\frac{f(1)-f(-1)}{2}-f'(0).$$

四、(10分) 设函数 $u(x,y), v(x,y)$在闭区域 $D: x^2+y^2\le 1$上有一阶连续偏导数, 又 $\boldsymbol{f}(x,y)=v(x,y)\boldsymbol{i}+u(x,y)\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{g}(x,y)=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{i}+\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)\boldsymbol{j}$, 且在$D$的边界上有 $u(x,y)\equiv 1$, $v(x,y)\equiv y$, 求 $\iint\limits_D \boldsymbol{f}\bullet\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}\sigma$.

解 $\because\ \boldsymbol{f}\bullet\boldsymbol{g}=v\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)+u\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)=v\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}-\left(v\dfrac{\partial u}{\partial y}+u\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial(uv)}{\partial x}-\dfrac{\partial(uv)}{\partial y}$,

$$\therefore \iint\limits_D \boldsymbol{f}\bullet\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D\left(\frac{\partial(uv)}{\partial x}-\frac{\partial(uv)}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=\oint_L uv\mathrm{d}x+uv\mathrm{d}y=\oint_L y\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{2\pi}(-\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta=-\pi,\quad L: x^2+y^2=1, \text{正向}.$$

五、(10分) 计算 $\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$\Sigma:(x-1)^2+(y-1)^2+\dfrac{z^2}{4}=1\,(y\geq 1)$,取外侧.

解　设$\Sigma_0: y=1$, 左侧, $D:(x-1)^2+\dfrac{z^2}{4}\leq 1$, 则原式$=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0} - \oiint\limits_{\Sigma_0}$.

$$\oiint\limits_{\Sigma_0} = -\iint\limits_{D}\mathrm{d}z\mathrm{d}x = -2\pi,$$

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0} = 2\iiint\limits_{V}(x+y+z)\mathrm{d}v = 2\iiint\limits_{V}(x+y)\mathrm{d}v = 2\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 2(r\cos\theta\sin\varphi + r\sin\theta\sin\varphi + 2)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$= 4\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}(\frac{1}{4}\cos\theta\sin^2\varphi + \frac{1}{4}\sin\theta\sin^2\varphi + \frac{2}{3}\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi = \frac{19}{3}\pi,$$

$\therefore$ 原式$=\dfrac{19}{3}\pi + 2\pi = \dfrac{25}{3}\pi$.

另解　设$\Sigma_0: y=1$, 左侧, $D:(x-1)^2+\dfrac{z^2}{4}\leq 1$, 则原式$=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0} - \oiint\limits_{\Sigma_0}$.

$\oiint\limits_{\Sigma_0} = -\iint\limits_{D}\mathrm{d}z\mathrm{d}x = -2\pi$, $\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0} = 2\iiint\limits_{V}(x+y+z)\mathrm{d}v$, 故原式$=2\iiint\limits_{V}(x+y+z)\mathrm{d}v + 2\pi$.

$\iiint\limits_{V} x\mathrm{d}v = \int_0^2 x\mathrm{d}x\iint\limits_{D_x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pi\int_0^2 x(2x-x^2)\mathrm{d}x = \dfrac{4}{3}\pi$, $D_x:(y-1)^2+\dfrac{z^2}{4}\leq 2x-x^2, y\geq 1$,

$\iiint\limits_{V} y\mathrm{d}v = \int_1^2 y\mathrm{d}x\iint\limits_{D_y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \pi\int_0^2 y\cdot 2\cdot(2y-y^2)\mathrm{d}y = \dfrac{11}{6}\pi$, $D_y:(x-1)^2+\dfrac{z^2}{4}\leq 2y-y^2$,

$\therefore$ 原式$=\dfrac{8}{3}\pi + \dfrac{11}{3}\pi + 2\pi = \dfrac{25}{3}\pi$.

六、(10分) 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,且和为S. 试求:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}$;　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}$.

解　(1) $\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n} = \dfrac{S_n+S_n-S_1+S_n-S_2+\cdots+S_n-S_{n-1}}{n}$

$$= S_n - \frac{S_1+S_2+\cdots+S_{n-1}}{n} = S_n - \frac{S_1+S_2+\cdots+S_{n-1}}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n},$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n} = S - S = 0;$$

(2) $\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)} = \dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n} - \dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n+1}$

$$= \frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n} - \frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n+(n+1)a_{n+1}}{n+1} + a_{n+1}.$$

记 $b_n=\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}$，则 $\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}=b_n-b_{n+1}+a_{n+1}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}=b_1+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S.$$

七、(10分) 飞机在机场开始滑行着陆. 在着陆时刻已失去垂直速度, 水平速度为v_0米/秒. 飞机与地面的摩擦系数为μ, 且飞机运动时所受空气的阻力与速度的平方成正比, 在水平方向的比例系数为k_x千克·秒^2/米^2, 在垂直方向的比例系数为k_y千克·秒^2/米^2. 设飞机的质量为m千克, 求飞机从着陆到停止所需的时间.

解 水平方向的阻力$R_x=k_xv^2$, 垂直方向的阻力$R_y=k_yv^2$, 摩擦力$W=\mu(mg-R_y)$.

由牛顿第二定律，有 $\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{k_x-\mu k_y}{m}(\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t})^2+\mu g=0.$

记 $A=\dfrac{k_x-\mu k_y}{m}$, $B=\mu g$, 根据题意知 $A>0$. 于是有 $\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}+A(\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t})^2+B=0$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+Av^2+B=0.$

分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}v}{Av^2+B}=-\mathrm{d}t$, 积分得 $\dfrac{1}{\sqrt{AB}}\arctan(\sqrt{\dfrac{A}{B}}v)=-t+C.$

代入初始条件$t=0, v=v_0$， 得 $C=\dfrac{1}{\sqrt{AB}}\arctan(\sqrt{\dfrac{A}{B}}v_0).$

$\therefore\quad t=\dfrac{1}{\sqrt{AB}}\arctan(\sqrt{\dfrac{A}{B}}v_0)-\dfrac{1}{\sqrt{AB}}\arctan(\sqrt{\dfrac{A}{B}}v).$

当$v=0$时，$t=\dfrac{1}{\sqrt{AB}}\arctan(\sqrt{\dfrac{A}{B}}v_0)=\sqrt{\dfrac{m}{(k_x-\mu k_y)\mu g}}\arctan\sqrt{\dfrac{k_x-\mu k_y}{m\mu g}}v_0$(秒).

以下两题乙组考生不做

八、(10分) 证明 $\sin 1$ 是无理数.

证 设 $\sin 1$ 是有理数，则 $\sin 1=\dfrac{p}{q}$, p,q是互素的正整数.

根据$\sin x$的展开式有 $\dfrac{p}{q}=1-\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{5!}-\dfrac{1}{7!}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}+\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cos\xi\ (2n-1>q).$

由 $(2n-1)!\dfrac{p}{q}=(2n-1)![1-\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{5!}-\dfrac{1}{7!}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}]+\dfrac{(-1)^n}{2n(2n+1)}\cos\xi$ 知，

$\dfrac{(-1)^n}{2n(2n+1)}\cos\xi$ 是整数(两个整数之差仍是整数).

然而 $|\cos\xi|\le 1$, $2n>1$, 故 $\dfrac{(-1)^n\cos\xi}{2n(2n+1)}$不可能是整数, 矛盾.

所以 $\sin 1$ 是无理数.

九、(10分) 在区间$(0,\dfrac{\pi}{2})$内, 试比较函数$\tan(\sin x)$与$\sin(\tan x)$的大小，并证明你的结论.

解　设 $f(x)=\tan(\sin x)-\sin(\tan x)$,则

$$f'(x)=\sec^2(\sin x)\cos x-\cos(\tan x)\sec^2 x=\frac{\cos^3 x-\cos(\tan x)\cos^2(\sin x)}{\cos^2(\sin x)\cos^2 x}.$$

当 $0<x<\arctan\frac{\pi}{2}$ 时，$0<\tan x<\frac{\pi}{2}, 0<\sin x<\frac{\pi}{2}$.

由余弦函数在（$0,\frac{\pi}{2}$）上的凸性有

$$\sqrt[3]{\cos(\tan x)\cos^2(\sin x)}\le\frac{1}{3}[\cos(\tan x)+2\cos(\sin x)]\le\cos\frac{\tan x+2\sin x}{3}.$$

设$\varphi(x)=\tan x+2\sin x-3x$，$\varphi'(x)=\sec^2 x+2\cos x-3=\tan^2 x-4\sin^2\frac{x}{2}>0.$

于是 $\tan x+2\sin x>3x$,所以$\cos\frac{\tan x+2\sin x}{3}<\cos x$,即$\cos(\tan x)\cos^2(\sin x)<\cos^3 x$.

于是当 $x\in(0,\arctan\frac{\pi}{2})$ 时，$f'(x)>0$, 又 $f(0)=0$, 所以　$f(x)>0$.

当 $x\in[\arctan\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 时, $\sin(\arctan\frac{\pi}{2})<\sin x<1$.　由于

$$\sin(\arctan\frac{\pi}{2})=\frac{\tan(\arctan\frac{\pi}{2})}{\sqrt{1+\tan^2(\arctan\frac{\pi}{2})}}=\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}}=\frac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}}>\frac{\pi}{4},$$

故　$\frac{\pi}{4}<\sin x<1$.　于是　$1<\tan(\sin x)<\tan 1$.

$\therefore$　当 $x\in[\arctan\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 时, $f(x)>0$.

综上可得, 当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时, $\tan(\sin x)>\sin(\tan x)$.