

2005 年浙江省大学生高等数学（微积分）竞赛试题
(数学类)

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							
评卷人							

一、计算题（每小题 12 分，满分 60 分）

得分	
----	--

1. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t \ln(1+t) dt - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8}}{(x - \sin x)(e^x - 1)}$

得分	
----	--

2. 计 $\int \frac{\sin x}{3 \cos x + 4 \sin x} dx$

得分	
----	--

3. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \tan^{2005} x}$

准考证号

姓名

专业

学校

得分	
----	--

4. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 点二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 1$, 求 $f(0)$, $f'(0)$ 和 $f''(0)$ 的值。

--	--

得分	
----	--

5. 设 $z = f(x-y, x+y) + g(x+ky)$, f, g 具有二阶连续偏导数, 且

$$g'' \neq 0, \text{ 如果 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4 f''_{22}, \text{ 求常数 } k \text{ 的值.}$$

--	--

二、(本题满分 20 分)

得分	
----	--

在某平地上向下挖一个半径为 R 的半球形池塘, 若某点泥土的密度为

$$\rho = e^{\frac{r^2}{R^2}}, \text{ 其中 } r \text{ 为此点离球心的距离, 试求挖此池塘需作的功.}$$

三、(本题满分 20 分)

得分	
----	--

判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(\sqrt{n})} \cdot \frac{1}{n}$ 的收敛性

	得分
--	----

四、(本题满分 20 分)

得分	
----	--

证明对任意连续函数 $f(x)$, 有

$$\max \left\{ \int_{-1}^1 |x - \sin^2 x - f(x)| dx, \int_{-1}^1 |\cos^2 x - f(x)| dx \right\} \geq 1$$

	得分
--	----

	得分
--	----

五、(本题满分 15 分)

得分

对下列函数 $f(x)$ ，分别说明是否存在一个区间 $[a, b]$ ， $(a > 0)$ ，使

$\{f(x) \mid x \in [a, b]\} = \{x \mid x \in [a, b]\}$ ，并说明理由。

(1) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}$

(2) $f(x) = \frac{1}{x}$

(3) $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$

六、(本题 15 分)

得分

设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上二阶导数连续，证明 $\int_{-1}^1 xf(x)dx = \frac{2}{3}f'(\xi) + \frac{1}{3}\xi f'(\xi)$ 。