2005年天津市大学数学竞赛试题（理工类）

一、 填空题（每空 3 分）

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=$________ .

2. 曲线$\begin{cases}x=e^t 2\sin t\\ y=e^t\cos t\end{cases}$，在点$(0,1)$处的法线方程为________ .

3. 设$f(x)$为连续函数，且$\int_0^{x^3-1}f(t)dt=x$，则$f(7)=$______.

4. 函数$u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$在点$A(1,0,1)$处，沿着点A指向点$B(3,-2,2)$方向的方向导数为___ .

5. 设$(a\times b)\cdot c=2$,，则$[(a+b)\times(b+c)]\cdot(c+a)=$_______.

二 选择题（每空 3 分）

1. 设函数$f(x)$与$g(x)$在开区间(a,b)内可导，考虑下面两个命题，

（1）若$f(x)>g(x)$，则$f'(x)>g'(x)$;

（2）若$f'(x)>g'(x)$，则$f(x)>g(x)$.

则正确的是（ ）

(A)两个命题均正确； (B) 两个命题均不正确；

(C)命题（1）正确，命题（2）不正确； (D) 命题（2）正确，命题（1）不正确.

2. 设函数$f(x)$连续，$F(x)$是$f(x)$的原函数，则（ ）

(A)当$f(x)$为奇函数时，$F(x)$必为偶函数；

(B)当$f(x)$为偶函数时，$F(x)$必为奇函数；

(C)当$f(x)$为周期函数时， $F(x)$必为周期函数；

(D)当$f(x)$为单调增函数时，$F(x)$必为单调增函数.

3. 设平面π位于平面$\pi_1: x-2y+z-2=0$与平面$\pi_2: x-2y+z-6=0$之间，且将此两平面的距离分为$1:3$，则平面π的一个方程为（ ）

(A) $x-2y+z=0$ ； (B) $x-2y+z+8=0$；

(C) $x-2y+z-8=0$ ； (D) $x-2y+z-3=0$.

4. 设$f(x,y,z)$为非零的连续函数，$F(x)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2}f(x,y,z)dxdydz$，则当$t\to0$时（ ）

(A) $F(t)$与t为同阶无穷小； (B) $F(t)$与t^2为同阶无穷小；

(C) $F(t)$与t^3为同阶无穷小； (D) $F(t)$是比t^3高阶的无穷小.

5. 设函数$y=y(x)$满足等式$y''-2y'+4y=0$，且$y(x_0)<0, y'(x_0)=0$，则$y(x)$在点x_0 处（ ）.

(A)取得极小值； (B)取得极大值；

(C)在x_0的一个邻域内单调增加； (D) 在x_0的一个邻域内单调减少.

三、（6 分）求函数 $f(x)=e^{-x^2}\sin x^2$ 的值域.

四、（6 分）设 $z=f(xy,\frac{x}{y})+g(\frac{y}{x})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，g 具有二阶连续导数. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

五、（6 分）设二元函数 $u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上可微，在 D 的边界曲线上 $u(x,y)=0$，并满足

$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=u(x,y)$，求 $u(x,y)$ 的表达式.

六、（7 分）设二元函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，且 $\int_{(0,0)}^{(t,t^2)} f(x,y)dx+x\cos y dy=t^2$，求 $f(x,y)$.

七、（7 分）设曲线 $y=ax^2(a>0,x\geq 0)$ 与 $y=1-x^2$ 交于点 A，过坐标原点 O 和点 A 的直线与曲线 $y=ax^2$

围成一平面图形，试问：

（1）当 a 为何值时，该图形绕 x 轴一周所得的旋转体体积最大？

（2）最大体积为多少？

八、（7 分）设 S 为椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分，点 $P(x,y,z)\in S$，π 为 S 在点 P 处的切平面，$\rho(x,y,z)$ 为点 $O(0,0,0)$ 到平面 π 的距离，求 $\iint\limits_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}dS$.

九、（8 分）证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}dx\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}dx$.

十、（8 分）设正值函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，$\int_a^b f(x)dx=A$，

证明：$\int_a^b f(x)e^{f(x)}dx\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx\geq(b-a)(b-a+A)$.

十一、（7 分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$\frac{4}{(b-a)^2}[f(a)-2(\frac{a+b}{2})+f(b)]=f''(\xi)$.

十二、（8 分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-2,2]$ 上具有二阶导数，$|f(x)|\leq 1$，且 $[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4$，

证明：存在一点 $\xi\in(-2,2)$，使得 $f(\xi)+f''(\xi)=0$.