2003 年天津市大学数学竞赛试题（经济管理类）

一． 填空(本题 15 分，每空 3 分。请将最终结果填在相应的横线上面)

1．设对一切实数 x 和 y，恒有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$, 且知 $f(\sqrt{2})=1$，则 $f(\frac{1}{\sqrt{2}})=$ ________

2．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)dt}{e^{2x^2}-2e^{x^2}+1}, x\neq 0\\ a, x=0\end{cases}$ ，在 $x=0$ 处连续, 则 $a=$ ________

3．设 $f(x,y,z)=e^z yz^2$，其中 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x+y+z+xyz=0$ 所确定的隐函数，则 $f_y{}'(0,1,-1)=$ ________

4．$\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x(1+x^2)}=$ ________

5．设 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=kt^2\end{cases}$ ，其中 $\varphi(t)$ 具有二阶导数，则 $\dfrac{d^2x}{dy^2}=$ ________

二． 选择题（本题 15 分，每小题 3 分。每各小题的四个选项中仅有一个是正确的，把你认为“正确选项” 前的字母填在括号内。选对得分；选错、不选或选出的答案多于一个，不得分）

1．当 $x\to 0$ 时，下列无穷小量

（1）$\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}$ （2）$\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}$

（3）$x-(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\cos x)\sin x$ （4）$e^{x^4-x}-1$

从低阶到高阶的排列顺序为（ ）

（A） (1),(2),(3),(4) （B）(3),(1),(2),(4) （C） (4),(3),(2),(1) （D）(4),(2),(1),(3)

2．设 $f(x)=\begin{cases}x^3 \operatorname{arc}\cot x, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$ ，在 $x=0$ 处存在最高阶导数的阶数为（ ）

（A）1 阶 （B） 2 阶 （C） 3 阶 （D） 4 阶

3．设函数 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处又连续的导函数，又 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{x-1}=2$，则 $x=1$ 是（ ）

（A）函数 $y=f(x)$ 的极大值点； （B）函数 $y=f(x)$ 的极小值点；

（C）曲线 $y=f(x)$ 拐点的横坐标； （D）以上答案均不正确.

4．设函数 f,g 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)<f(x)<m$（m 为常数），则曲线 $y=g(x), y=f(x), x=a$ 和 $x=b$ 所围平面图形绕直线 $y=m$ 旋转而成的旋转体体积为（ ）

（A）$\pi\int_a^b[2m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]dx$；

（B）$\pi\int_a^b[2m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]dx$；

（C）$\pi\int_a^b[m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]dx$；

（D）$\pi\int_a^b [m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]dx$.

5. 设 $f(u)$ 是关于 u 的奇函数，D 是由 $x=1, y=-x^3, y=1$ 所围成的平面区域，则 $\iint_D [x^3+f(xy)]dxdy=$

（A）0;　　（B）1/4;　　（C）2/7;　　（D）$\iint_D f(xy)dxdy$.

三.（6 分）a,b,c 为何值时，下式成立 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin x-ax}\int_b^x \dfrac{t^2dt}{\sqrt{1+t^2}}=c$

四.（6 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}, x\neq 0\\ a, x=0\end{cases}$，其中 $\varphi(x)$ 具有连续的二阶导函数，且 $\varphi(0)=1$.

（1） 确定 a 的值，使 $f(x)$在点$x=0$处可导，并求$f'(x)$.

（2） 讨论 $f'(x)$在点$x=0$处的连续性.

五.（6 分）设正值函数 f(x)在$[1,+\infty)$上连续，求函数

$F(x)=\int_1^x [(\frac{2}{x}+\ln x)-(\frac{2}{t}+\ln t)]f(t)dt$的最小值点.

六.（6 分）设 $y'(x)=\arctan(x-1)^2$，且$y'(0)=0$，求$\int_0^1 y(x)dx$.

七.（7 分）设变换$\begin{cases}u=x+a\sqrt{y}\\ v=x+2\sqrt{y}\end{cases}$，把方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$化为$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$

试确定 a.

八．（7 分）计算 $I=\int_0^{a\sin\varphi} e^{y^2}dy\int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{b^2-y^2}} e^{x^2}dx+\int_{a\sin\varphi}^{b\sin\varphi} e^{y^2}dy\int_{y\tan\varphi}^{\sqrt{b^2-y^2}} e^{x^2}dx$ 其中

$0<a<b, 0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，且$a,b,\varphi$ 均为常数.

九.（8 分）设函数 $f(x)$ 具有连续的二阶导数，且 $f(0)=0, f'(0)=0, f''(0)>0$. 在曲线 $y=f(x)$ 上任意取一点（$x, f(x)$）（$x\neq 0$）作曲线的切线，此切线在 x 轴上的截距记作 μ，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(\mu)}{\mu f(x)}$.

十．（7 分）设函数 $f(x)$在闭区间［0，1］上连续，在开区间（0，1）内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$. 试证明：对于任意给定的正数a和b，在开区间（0，1）内存在不同的ξ和η，使得 $\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b$.

十一.（7 分）设 $F(x)=-\dfrac{1}{2}(1+e^{-1})+\int_{-1}^{1}(x-t)e^{-t^2}dt$. 试证明在区间［－1，1］上 $F(x)$ 有且仅有两个实根.

十二.（8 分）设函数 $f(x,y)$ 在单位圆域上有连续的偏导数，且在边界上的值恒为零. 证明：

$f(0,0)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\dfrac{-1}{2\pi}\iint_D \dfrac{xf_x'+yf_y'}{x^2+y^2}dxdy$，其中：D 为圆域 $\varepsilon^2\le x^2+y^2\le 1$.