

姓名：____ 身份证号：____ 所在院校：____ 年级：____ 专业：____

线
—
封
—
密

首届中国大学生数学竞赛赛区赛试卷解答

(数学类, 2009)

考试形式： 闭卷 考试时间： 120 分钟 满分： 100 分.

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总分
满 分	15	20	15	10	10	15	15	100
得 分								

注意：1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边，写在其它纸上一律无效。
2、密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记。

得 分	
评阅人	

一、(15 分) 求经过三平行直线 $L_1: x = y = z$,
 $L_2: x-1 = y = z+1$, $L_3: x = y+1 = z-1$ 的圆柱面的方程.

解： 先求圆柱面的轴 L_0 的方程. 由已知条件易知，圆柱面母线的方向是 $\vec{n} = (1,1,1)$ ， 且圆柱面经过点 $O(0,0,0)$ ， 过点 $O(0,0,0)$ 且垂直于 $\vec{n} = (1,1,1)$ 的平面 π 的方程为： $x + y + z = 0$ (3 分)

π 与三已知直线的交点分别为 $O(0,0,0), P(1,0,-1), Q(0,-1,1)$ (5 分)

圆柱面的轴 L_0 是到这三点等距离的点的轨迹， 即

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 \end{cases},$$

即

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}, \dots\dots\dots (9 \text{ 分})$$

将 L_0 的方程改为标准方程

$$x-1 = y+1 = z.$$

圆柱面的半径即为平行直线 $x = y = z$ 和 $x-1 = y+1 = z$ 之间的距离. $P_0(1,-1,0)$

为 L_0 上的点. (12 分)

对圆柱面上任意一点 $S(x, y, z)$, 有 $\frac{|\vec{n} \times \overrightarrow{P_0S}|}{|\vec{n}|} = \frac{|\vec{n} \times \overrightarrow{P_0O}|}{|\vec{n}|}$, 即

$$(-y+z-1)^2 + (x-z-1)^2 + (-x+y+2)^2 = 6,$$

所以, 所求圆柱面的方程为:

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz - 3x + 3y = 0. \dots\dots\dots (15 \text{ 分})$$

得 分	
评阅人	

二、(20 分) 设 $C^{n \times n}$ 是 $n \times n$ 复矩阵全体在通常的运算下所构成

的复数域 C 上的线性空间, $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}.$

(1) 假设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, 若 $AF = FA$, 证明:

$$A = a_{n1}F^{n-1} + a_{n-11}F^{n-2} + \cdots + a_{21}F + a_{11}E;$$

(2) 求 $C^{n \times n}$ 的子空间 $C(F) = \{X \in C^{n \times n} \mid FX = XF\}$ 的维数.

(1) 的证明: 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, $M = a_{n1}F^{n-1} + a_{n-11}F^{n-2} + \cdots + a_{21}F + a_{11}E$. 要证明 $M = A$, 只需证明 A 与 M 的各个列向量对应相等即可. 若以 e_i 记第 i 个基本单位列向量. 于是, 只需证明: 对每个 i , $Me_i = Ae_i (= \alpha_i)$ (2 分)

若记 $\beta = (-a_n, -a_{n-1}, \cdots, -a_1)^T$, 则 $F = (e_2, e_3, \cdots, e_n, \beta)$. 注意到,

$$Fe_1 = e_2, F^2e_1 = Fe_2 = e_3, \cdots, F^{n-1}e_1 = F(F^{n-2}e_1) = Fe_{n-1} = e_n \quad (*) \dots\dots (6 \text{ 分})$$

由

$$\begin{aligned} Me_1 &= (a_{n1}F^{n-1} + a_{n-11}F^{n-2} + \cdots + a_{21}F + a_{11}E)e_1 \\ &= a_{n1}F^{n-1}e_1 + a_{n-11}F^{n-2}e_1 + \cdots + a_{21}Fe_1 + a_{11}Ee_1 \\ &= a_{n1}e_n + a_{n-11}e_{n-1} + \cdots + a_{21}e_2 + a_{11}e_1 \\ &= \alpha_1 = Ae_1. \dots\dots\dots (10 \text{ 分}) \end{aligned}$$

知 $Me_2 = MFe_1 = FMe_1 = FAe_1 = AFe_1 = Ae_2$

$$Me_3 = MF^2e_1 = F^2Me_1 = F^2Ae_1 = AF^2e_1 = Ae_3$$

.....

$$Me_n = MF^{n-1}e_1 = F^{n-1}Me_1 = F^{n-1}Ae_1 = AF^{n-1}e_1 = Ae_n$$

所以, $M = A$ (14 分)

(2) 解: 由 (1), $C(F) = \text{span}\{E, F, F^2, \dots, F^{n-1}\}$, (16 分)

设 $x_0E + x_1F + x_2F^2 + \dots + x_{n-1}F^{n-1} = O$, 等式两边同右乘 e_1 , 利用 (*) 得

$$\begin{aligned} \theta = Oe_1 &= (x_0E + x_1F + x_2F^2 + \dots + x_{n-1}F^{n-1})e_1 \\ &= x_0Ee_1 + x_1Fe_1 + x_2F^2e_1 + \dots + x_{n-1}F^{n-1}e_1 \\ &= x_0e_1 + x_1e_2 + x_2e_3 + \dots + x_{n-1}e_n \dots\dots\dots(18\text{分}) \end{aligned}$$

因 $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ 线性无关, 故, $x_0 = x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$ (19 分)

所以, $E, F, F^2, \dots, F^{n-1}$ 线性无关. 因此, $E, F, F^2, \dots, F^{n-1}$ 是 $C(F)$ 的基, 特别地,

$\dim C(F) = n$ (20 分)

得 分	
评阅人	

三、(15 分) 假设 V 是复数域 C 上 n 维线性空间 ($n > 0$), f, g 是 V 上的线性变换. 如果 $fg - gf = f$, 证明: f 的特征值都是

0, 且 f, g 有公共特征向量.

证明: 假设 λ_0 是 f 的特征值, W 是相应的特征子空间, 即

$$W = \{\eta \in V \mid f(\eta) = \lambda_0\eta\}. \text{于是, } W \text{ 在 } f \text{ 下是不变的.} \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

下面先证明, $\lambda_0 = 0$. 任取非零 $\eta \in W$, 记 m 为使得 $\eta, g(\eta), g^2(\eta), \dots, g^m(\eta)$ 线性相关的最小的非负整数, 于是, 当 $0 \leq i \leq m-1$ 时, $\eta, g(\eta), g^2(\eta), \dots, g^i(\eta)$ 线性无关..... (2 分)

$0 \leq i \leq m-1$ 时令 $W_i = \text{span}\{\eta, g(\eta), g^2(\eta), \dots, g^i(\eta)\}$, 其中, $W_0 = \{\theta\}$. 因此, $\dim W_i = i$

($1 \leq i \leq m$), 并且, $W_m = W_{m+1} = W_{m+2} = \dots$. 显然, $g(W_i) \subseteq W_{i+1}$, 特别地, W_m 在 g 下是不变的. (4 分)

下面证明, W_m 在 f 下也是不变的. 事实上, 由 $f(\eta) = \lambda_0\eta$, 知

$$fg(\eta) = gf(\eta) + f(\eta) = \lambda_0g(\eta) + \lambda_0\eta \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned}
fg^2(\eta) &= gfg(\eta) + fg(\eta) \\
&= g(\lambda_0 g(\eta) + \lambda_0 \eta) + (\lambda_0 g(\eta) + \lambda_0 \eta) \\
&= \lambda_0 g^2(\eta) + 2\lambda_0 g(\eta) + \lambda_0 \eta \quad \dots\dots\dots(6\text{分})
\end{aligned}$$

根据

$$\begin{aligned}
fg^k(\eta) &= gfg^{k-1}(\eta) + fg^{k-1}(\eta) \\
&= g(fg^{k-1})(\eta) + fg^{k-1}(\eta)
\end{aligned}$$

用归纳法不难证明, $fg^k(\eta)$ 一定可以表示成 $\eta, g(\eta), g^2(\eta), \dots, g^k(\eta)$ 的线性组合, 且表示式中 $g^k(\eta)$ 前的系数为 λ_0 (8 分)

因此, W_m 在 f 下也是不变的, f 在 W_m 上的限制在基 $\eta, g(\eta), g^2(\eta), \dots, g^{m-1}(\eta)$ 下的矩阵是上三角矩阵, 且对角线元素都是 λ_0 , 因而, 这一限制的迹为 $m\lambda_0$ (10 分)

由于 $fg - gf = f$ 在 W_m 上仍然成立, 而 $fg - gf$ 的迹一定为零, 故 $m\lambda_0 = 0$, 即 $\lambda_0 = 0$ (12 分)

任取 $\eta \in W$, 由于 $f(\eta) = \theta$, $fg(\eta) = gf(\eta) + f(\eta) = g(\theta) + f(\eta) = \theta$, 所以, $g(\eta) \in W$. 因此, W 在 g 下是不变的. 从而, 在 W 中存在 g 的特征向量, 这也是 f, g 的公共特征向量. (15 分)

得 分	
评阅人	

四、(10 分) 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 $[a, b]$ 上的无穷次可微的函数序列且逐点收敛, 并在 $[a, b]$ 上满足 $|f'_n(x)| \leq M$. (1) 证明 $\{f_n(x)\}$

在 $[a, b]$ 上一致收敛; (2) 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, 问 $f(x)$ 是否一定在 $[a, b]$ 上处处可导, 为什么?

证明: (1) $\forall \varepsilon > 0$, 将区间 $[a, b]$ K 等分, 分点为 $x_j = a + \frac{j(b-a)}{K}$, $j = 0, 1, 2, \dots, K$, 使得 $\frac{b-a}{K} < \varepsilon$. 由于 $\{f_n(x)\}$ 在有限个点 $\{x_j\}$, $j = 0, 1, 2, \dots, K$ 上收敛, 因此 $\exists N$, $\forall m > n > N$, 使得 $|f_m(x_j) - f_n(x_j)| < \varepsilon$ 对每个 $j = 0, 1, 2, \dots, K$ 成立. (3 分)

于是 $\forall x \in [a, b]$, 设 $x \in [x_j, x_{j+1}]$, 则

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_m(x_j)| + |f_m(x_j) - f_n(x_j)| + |f_n(x_j) - f_n(x)|,$$

线

封

密

$$=|f'_m(\xi)(x-x_j)|+|f_m(x_j)-f_n(x_j)|+|f'_n(\eta)(x-x_j)|<(2M+1)\varepsilon. \quad \dots (5 \text{ 分})$$

(2) 不一定. (6 分)

令 $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}$, 则 $f(x)=\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上不能保证处处可导. (10 分)

得 分	
评阅人	

五、(10 分) 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \left| \frac{\sin nt}{\sin t} \right|^3 dt$, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 发散.

解: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \left| \frac{\sin nt}{\sin t} \right|^3 dt = \int_0^{\frac{\pi}{n}} t \left| \frac{\sin nt}{\sin t} \right|^3 dt + \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}} t \left| \frac{\sin nt}{\sin t} \right|^3 dt = I_1 + I_2 \quad \dots (3 \text{ 分})$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{n}} t \left| \frac{\sin nt}{\sin t} \right|^3 dt < n^3 \int_0^{\frac{\pi}{n}} t dt = \frac{\pi^2 n}{2}, \quad \dots (5 \text{ 分})$$

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}} t \left| \frac{\sin nt}{\sin t} \right|^3 dt < \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}} t \cdot \left(\frac{\pi}{2t} \right)^3 dt = -\frac{\pi^3}{8} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\left(\frac{1}{t} \right) \quad \dots (7 \text{ 分})$$

$$= \frac{\pi^3}{8} \left(\frac{n}{\pi} - \frac{2}{\pi} \right) < \frac{\pi^2 n}{8}. \quad \dots (8 \text{ 分})$$

因此 $\frac{1}{a_n} > \frac{1}{\pi^2 n}$, 由此得到 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 发散. (10 分)

得 分	
评阅人	

六、(15 分) $f(x,y)$ 是 $\{(x,y)|x^2+y^2 \leq 1\}$ 上二次连续可微函数, 满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 y^2$, 计算

积分

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy.$$

解: 采用极坐标 $x=r \cos \theta, y=r \sin \theta$, 则

$$I = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} \left(\cos \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right) r d\theta = \int_0^1 dr \int_{x^2+y^2=r^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} dy - \frac{\partial f}{\partial y} dx \right) \dots (6 \text{ 分})$$

$$= \int_0^1 dr \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y^2} \right) dx dy = \int_0^1 dr \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} (x^2 y^2) dx dy \quad \dots (10 \text{ 分})$$

$$= \int_0^1 dr \int_0^r \rho^5 d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{168}. \quad \dots\dots\dots(15 \text{ 分})$$

得 分	
评阅人	

七、(15 分)) 假设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内二阶可导, 过点 $A(0, f(0))$, 与点 $B(1, f(1))$ 的直线与曲线 $y = f(x)$ 相交于点

$C(c, f(c))$, 其中 $0 < c < 1$. 证明: 在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f''(\xi) = 0$.

证明: 因为 $f(x)$ 在 $[0, c]$ 上满足 *Lagrange* 中值定理的条件, 故存在 $\xi_1 \in (0, c)$, 使 $f'(\xi_1) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0}$. $\dots\dots\dots$ (4 分)

由于 C 在弦 AB 上, 故有

$$\frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - f(0). \quad \dots\dots\dots (7 \text{ 分})$$

从而 $f'(\xi_1) = f(1) - f(0)$. $\dots\dots\dots$ (8 分)

同理可证, 存在 $\xi_2 \in (c, 1)$, 使 $f'(\xi_2) = f(1) - f(0)$. $\dots\dots\dots$ (11 分)

由 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$, 知 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上 $f'(x)$ 满足 *Rolle* 定理的条件, 所以存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0, 1)$, 使 $f''(\xi) = 0$. $\dots\dots\dots$ (15 分)