

姓名： 身份证号： 所在院校： 年级： 专业：

线
—
封
—
密

首届中国大学生数学竞赛赛区赛试卷
(数学类, 2009)

考试形式： 闭卷 考试时间： 120 分钟 满分： 100 分.

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总分
满 分	15	20	15	10	10	15	15	100
得 分								

注意：1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边，写在其它纸上一律无效.
2、密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记.

得 分	
评阅人	

一、(15 分) 求经过三平行直线

$L_1 : x = y = z$, $L_2 : x - 1 = y = z + 1$, $L_3 : x = y + 1 = z - 1$

的圆柱面的方程.

得 分	
评阅人	

二、(20 分) 设 $C^{n \times n}$ 是 $n \times n$ 复矩阵全体在通常的运算下所构成

的复数域 C 上的线性空间, $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}.$

(1) 假设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, 若 $AF = FA$, 证明:

$$A = a_{n1}F^{n-1} + a_{n-11}F^{n-2} + \cdots + a_{21}F + a_{11}E.$$

(2) 求 $C^{n \times n}$ 的子空间 $C(F) = \{X \in C^{n \times n} \mid FX = XF\}$ 的维数.

姓名：_____ 身份证号：_____ 所在院校：_____ 年级：_____ 专业：_____

线
—
封
—
密

得 分	
评阅人	

三、(15 分) 假设 V 是复数域 C 上 n 维线性空间 ($n > 0$), f, g 是 V 上的线性变换. 如果 $fg - gf = f$, 证明: f 的特征值都是 0, 且 f, g 有公共特征向量.

得 分	
评阅人	

四、(10 分) 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 $[a, b]$ 上的无穷次可微的函数序列且逐点收敛, 并在 $[a, b]$ 上满足 $|f_n'(x)| \leq M$. (1) 证明 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛; (2) 记 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, 问 $f(x)$ 是否一定在 $[a, b]$ 上处处可导, 为什么?

得 分	
评阅人	

五、(10 分) 设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \left| \frac{\sin nt}{\sin t} \right|^3 dt$, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 发散.

线

封

密

得 分	
评阅人	

六、(15 分) $f(x,y)$ 是 $\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$ 上二次连续可微函数, 满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^2y^2$, 计算积分

$$I=\iint_{x^2+y^2\leq 1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

得 分	
评阅人	

七、(15 分) 假设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内二阶可导, 过点 $A(0, f(0))$, 与点 $B(1, f(1))$ 的直线与曲线 $y = f(x)$ 相交于点

$C(c, f(c))$, 其中 $0 < c < 1$. 证明: 在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f''(\xi) = 0$.