

首届全国大学生数学竞赛决赛试卷参考答案

(数学类, 2010)

一、 填空题

(1) 设 $\beta > \alpha > 0$, 则 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx = \underline{\sqrt{\pi}(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})}$.

(2) 若关于 x 的方程 $kx + \frac{1}{x^2} = 1 (k > 0)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 中有惟一实数解, 则常数 $k = \underline{\frac{2\sqrt{3}}{9}}$.

(3) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续. 由积分中值公式有 $\int_a^x f(t) dt = (x-a)f(\xi) \quad (a \leq \xi \leq x < b)$.

若导数 $f'_+(a)$ 存在且非零, 则 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\xi - a}{x - a}$ 的值等于 $\underline{\frac{1}{2}}$.

(4) 设 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 6$, 则 $[(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c})] \cdot (\vec{a} + \vec{c}) = \underline{12}$.

二、 设 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内有定义, 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{f'(0)}{2}$.

证: 根据题目假设和泰劳展开式, 我们有 $f(x) = f(0) + f'(0)x + \alpha(x)x$, 其中 $\alpha(x)$ 是 x 的函数, $\alpha(0)=0$, 且 $\alpha(x) \rightarrow 0$, 当 $x \rightarrow 0$.

因此, 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $|\alpha(x)| < \varepsilon$, 只要 $|x| < \delta$.

对于任意自然数 n 和 $k \leq n$, 我们总有 $f\left(\frac{k}{n^2}\right) = f'(0)\frac{k}{n^2} + \alpha\left(\frac{k}{n^2}\right)\frac{k}{n^2}$.

取 $N > \delta^{-1}$, 对于上述给定的 $\varepsilon > 0$, 便有

$$\left| \alpha\left(\frac{k}{n^2}\right) \right| < \varepsilon, \text{ 只要 } n > N, k \leq n.$$

于是, $\left| \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f'(0)\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \right| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}$, 只要 $n > N$.

此式又可写成 $\left| \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{1}{2} f'(0) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, 只要 $n > N$.

令 $n \rightarrow \infty$, 对上式取极限即得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{1}{2} f'(0) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{和} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) \geq \frac{1}{2} f'(0) - \frac{\varepsilon}{2}$$

由 ε 的任意性, 即得 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{2} f'(0)$ 。证毕。

三、设 $f(x)$ 在 $[0, \infty)$ 上一致连续, 且对于固定的 $x \in [0, \infty)$, 当自然数 $n \rightarrow \infty$ 时 $f(x+n) \rightarrow 0$. 证明函数序列 $\{f(x+n): n=1, 2, \dots\}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛于 0.

证: 由于 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 故对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $\delta > 0$ 使得

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{只要 } |x_1 - x_2| < \delta \quad (x_1 \geq 0, x_2 \geq 0)$$

取一个充分大的自然数 m , 使得 $m > \delta^{-1}$, 并在 $[0, 1]$ 中取 m 个点:

$$x_1 = 0 < x_2 < \dots < x_m = 1,$$

其中 $x_j = \frac{j}{m}$ ($j=1, 2, \dots, m$)。这样, 对于每一个 j ,

$$|x_{j+1} - x_j| = \frac{1}{m} < \delta。$$

又由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x+n) = 0$, 故对于每一个 x_j , 存在一个 N_j 使得

$$|f(x_j + n)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{只要 } n > N_j,$$

这里的 ε 是前面给定的。令 $N = \max\{N_1, \dots, N_m\}$, 那么

$$|f(x_j + n)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{只要 } n > N,$$

其中 $j=1, 2, \dots, m$ 。设 $x \in [0, 1]$ 是任意一点, 这时总有一个 x_j 使得 $x \in [x_j, x_{j+1}]$ 。

由 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续性及 $|x - x_j| < \delta$ 可知,

$$|f(x_j + n) - f(x + n)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall n = 1, 2, \dots)$$

另一方面, 我们已经知道

$$|f(x_j + n)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{只要 } n > N$$

这样, 由后面证得的两个式子就得到

$$|f(x+n)| < \varepsilon, \text{ 只要 } n > N, x \in [0,1]$$

注意到这里的 N 的选取与点 x 无关, 这就证实了函数序列 $\{f(x+n): n=1, 2, \dots\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 0。

四、设 $D = \{(x, y): x^2 + y^2 < 1\}$, $f(x, y)$ 在 D 内连续, $g(x, y)$ 在 D 内连续有界, 且满足条件: (1)

当 $x^2 + y^2 \rightarrow 1$ 时, $f(x, y) \rightarrow +\infty$; (2) 在 D 内 f 与 g 有二阶偏导数, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^f$ 和

$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \geq e^g$. 证明: $f(x, y) \geq g(x, y)$ 在 D 内处处成立.

证: 用反证法。假定该不等式在某一点不成立, 我们将导出矛盾。

令 $F(x, y) = f(x, y) - g(x, y)$. 那么, 根据题目假设, 当 $x^2 + y^2 \rightarrow 1$ 时, $F(x, y) \rightarrow +\infty$.

这样, $F(x, y)$ 在 D 内必然有最小值。设最小值在 $(x_0, y_0) \in D$ 达到。

根据反证法假设, 我们有

$$F(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) - g(x_0, y_0) < 0. \quad (\text{i})$$

另一方面, 根据题目假设, 我们又有

$$\Delta F = \Delta f - \Delta g \leq e^{f(x, y)} - e^{g(x, y)}, \quad (\text{ii})$$

其中 Δ 是拉普拉斯算子: $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

式子 (ii) 在 D 中处处成立, 特别地在 (x_0, y_0) 成立:

$$\Delta F|_{(x_0, y_0)} = \Delta f|_{(x_0, y_0)} - \Delta g|_{(x_0, y_0)} \leq e^{f(x_0, y_0)} - e^{g(x_0, y_0)}. \quad (\text{iii})$$

由 (i) 与 (iii) 可知, $\Delta F|_{(x_0, y_0)} < 0$. (iv)

但是, (x_0, y_0) 是 $F(x, y)$ 的极小值点, 应该有 $F_{xx}(x_0, y_0) \geq 0; F_{yy} \geq 0$, 并因此 $\Delta F|_{(x_0, y_0)} \geq 0$

这与 (iv) 矛盾。此矛盾证明了题目中的结论成立。证毕。

五、分别设

$$R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}, \quad R_\varepsilon = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1 - \varepsilon; 0 \leq y \leq 1 - \varepsilon\}.$$

考虑积分 $I = \iint_R \frac{dx dy}{1-xy}$ 与 $I_\varepsilon = \iint_{R_\varepsilon} \frac{dx dy}{1-xy}$, 定义 $I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_\varepsilon$.

(1) 证明 $I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$;

(2) 利用变量替换: $\begin{cases} u = \frac{1}{2}(x+y) \\ v = \frac{1}{2}(y-x) \end{cases}$ 计算积分 I 的值, 并由此推出 $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

证: 显然, $I_\varepsilon = \iint_{R_\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n dx dy$

注意到上述级数在 R_ε 上的一致收敛性, 我们有

$$I_\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{1-\varepsilon} x^n dx \int_0^{1-\varepsilon} y^n dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\varepsilon)^{2n}}{n^2}.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2}$ 在点 $x=1$ 收敛, 故有 $I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

下面证明 $I = \frac{\pi^2}{6}$. 在给定的变换下, $x = u - v, y = u + v$, 那么 $\frac{1}{1-xy} = \frac{1}{1-u^2+v^2}$,

变换的雅可比行列式, $J = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = 2$.

假定正方形 R 在给定变换下的像为 $\tilde{R}$, 那么根据 $\tilde{R}$ 的图象以及被积函数的特征, 我们有

$$I = 2 \iint_{\tilde{R}} \frac{1}{1-u^2+v^2} du dv = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^u \frac{dv}{1-u^2+v^2} \right) du + 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_0^{1-u} \frac{dv}{1-u^2+v^2} \right) du$$

利用 $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$,

又得

$$I = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)}{\sqrt{1-u^2}} du + 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)}{\sqrt{1-u^2}} du.$$

令 $g(u) = \arctan \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}; h(u) = \arctan \frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} = \arctan \sqrt{\frac{1-u}{1+u}},$

$$\text{那么 } g'(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}; h'(u) = -\frac{2}{\sqrt{1-u^2}}。$$

最后，我们得到

$$\begin{aligned} I &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} g'(u)g(u)du - 8 \int_{\frac{1}{2}}^1 h'(u)h(u)du \\ &= 2[g(u)]^2 \Big|_0^{\frac{1}{2}} - 4[h(u)]^2 \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = 2\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 - 0 - 0 + 4\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6}。 \end{aligned}$$

六、已知两直线的方程： $L: x=y=z$ ， $L': \frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z-b}{1}$ 。(1) 问：参数 a, b 满足什么条件时， L 与 L' 是异面直线？(2) 当 L 与 L' 不重合时，求 L' 绕 L 旋转所生成的旋转面 π 的方程，并指出曲面 π 的类型。

解：(1) L, L' 的方向向量分别为 $\vec{n} = (1, 1, 1), \vec{n}' = (1, a, 1)$ 。

分别取 L, L' 上的点 $O(0, 0, 0), P(0, 0, b)$ 。 L 与 L' 是异面直线当且仅当矢量 $\vec{n}, \vec{n}', \overrightarrow{OP}$ 不共面，即，它们的混合积不为零：

$$(\vec{n}, \vec{n}', \overrightarrow{OP}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = (a-1)b \neq 0,$$

所以， L 与 L' 是异面直线当且仅当 $a \neq 1$ 且 $b \neq 0$ 。

(2) 假设 $P(x, y, z)$ 是 π 上任一点，于是 P 必定是 L' 上一点 $P'(x', y', z')$ 绕 L 旋转所生成的。由于 $\overrightarrow{P'P}$ 与 L 垂直，所以，

$$(x-x') + (y-y') + (z-z') = 0 \quad ①$$

又由于 P' 在 L' 上，所以，

$$\frac{x'}{1} = \frac{y'}{a} = \frac{z'-b}{1}, \quad ②$$

因为 L 经过坐标原点，所以， P, P' 到原点的距离相等，故，

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2, \quad ③$$

将①，②，③联立，消去其中的 x', y', z' ：

$$\text{令 } \frac{x'}{1} = \frac{y'}{a} = \frac{z'-b}{1} = t, \text{ 将 } x', y', z' \text{ 用 } t \text{ 表示:}$$

$$x' = t, y' = at, z' = t + b, \quad ④$$

将④代入①，得

$$(a+2)t = x+y+z-b, \quad (5)$$

当 $a \neq -2$ ，即 L 与 L' 不垂直时，解得 $t = \frac{1}{a+2}(x+y+z-b)$ ，据此，再将④代入③，得到 π 的方程：

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{a^2 + 2}{(a+2)^2}(x+y+z-b)^2 - \frac{2b}{a+2}(x+y+z-b) - b^2 = 0,$$

当 $a = -2$ 时，由⑤得， $x+y+z=b$ ，这表明， π 在这个平面上。

同时，将④代入③，有 $x^2 + y^2 + z^2 = 6t^2 + 2bt + b^2 = 6(t + \frac{1}{6}b)^2 + \frac{5}{6}b^2$ 。由于 t 可以是任意的，所以，这时， π 的方程为：

$$\begin{cases} x+y+z=b \\ x^2+y^2+z^2 \geq \frac{5}{6}b^2 \end{cases},$$

π 的类型： $a=1$ 且 $b \neq 0$ 时， L 与 L' 平行， π 是一柱面； $a \neq 1$ 且 $b=0$ 时， L 与 L' 相交， π 是一锥面（ $a=-2$ 时 π 是平面）；当 $a \neq 1$ 且 $b \neq 0$ 时， π 是单叶双曲面（ $a=-2$ 时， π 是去掉一个圆盘后的平面）。

七、设 A, B 均为 n 阶半正定实对称矩阵，且满足 $n-1 \leq \text{rank } A \leq n$ 。证明存在实可逆矩阵 C 使得 $C^T A C, C^T B C$ 均为对角阵。

证明 (1) A 的秩为 n 的情形：此时， A 为正定阵。于是存在可逆矩阵 P 使得

$$P^T A P = E。$$

因为 $P^T B P$ 是实对称矩阵，所以存在正交矩阵 Q 使得 $Q^T (P^T B P) Q = \Lambda$ 是对角矩阵。

令 $C = P Q$ ，则有 $C^T A C = E, C^T B C = \Lambda$ 都是对角阵。

(2) A 的秩为 $n-1$ 的情形：此时，存在实可逆矩阵 P 使得 $P^T A P = \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。

因为 $P^T B P$ 是实对称矩阵，所以，可以假定 $P^T B P = \begin{pmatrix} B_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & b \end{pmatrix}$ ，其中 B_{n-1} 是 $n-1$ 阶实对称矩阵。

因为 B_{n-1} 是 $n-1$ 阶实对称矩阵，所以存在 $n-1$ 阶正交矩阵 Q_{n-1} ，使得

$$Q_{n-1}^T B_{n-1} Q_{n-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda_{n-1} \text{ 为对角阵。}$$

令 $Q = \begin{pmatrix} Q_{n-1} & \\ & 1 \end{pmatrix}$ ， $C = P Q$ ，则 $C^T A C, C^T B C$ 可以表示为

$$C^T A C = \begin{pmatrix} E_{n-1} & \\ & 0 \end{pmatrix}, C^T B C = \begin{pmatrix} \Lambda_{n-1} & \eta \\ \eta^T & d \end{pmatrix},$$

其中 $\eta = (d_1, d_2, \dots, d_{n-1})^T$ 是 $n-1$ 维列向量。

为简化记号，我们不妨假定 $A = \begin{pmatrix} E_{n-1} & \\ & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \Lambda_{n-1} & \eta \\ \eta^T & d \end{pmatrix}$ 。

如果 $d = 0$ ，由于 B 是半正定的， B 的各个主子式均 ≥ 0 。考虑 B 的含 d 的各个 2 阶主子式，容易知道， $\eta = 0$ 。此时 B 已经是对角阵了，如所需。

现假设 $d \neq 0$ 。显然，对于任意实数 k ， A, B 可以通过合同变换同时化成对角阵当且仅当同

一合同变换可以将 $A, kA + B$ 同时化成对角阵。由于 $k \geq 0$ 时， $kA + B$ 仍然是半正定矩阵，

由 (1)，我们只需要证明：存在 $k \geq 0$ ， $kA + B$ 是可逆矩阵即可。

注意到，当 $k + \lambda_i$ 都不是 0 时，行列式

$$|kA+B| = \begin{vmatrix} k+\lambda_1 & & & d_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & k+\lambda_{n-1} & d_{n-1} \\ d_1 & \cdots & d_{n-1} & d \end{vmatrix} = \left(d - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{d_i^2}{k+\lambda_i} \right) \prod_{j=1}^{n-1} (k+\lambda_j)$$

故只要 k 足够大就能保证 $kA+B$ 是可逆矩阵。从而 A, B 可以通过合同变换同时化成对角阵。证毕。

八、设 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间, $f_j: V \rightarrow \mathbb{C}$ 是非零的线性函数, $j=1, 2$. 若不存在 $0 \neq c \in \mathbb{C}$ 使得 $f_1 = cf_2$, 证明: 任意的 $\alpha \in V$ 都可表为 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ 使得 $f_1(\alpha) = f_1(\alpha_2)$, $f_2(\alpha) = f_2(\alpha_1)$.

证明: 记 $E_j = \text{Ker } f_j, j=1, 2$. 由 $f_j \neq 0$ 知 $\dim E_j = n-1, j=1, 2$.

不失一般性, 可令

$$V = \mathbb{C}^n = \{ \alpha = (x_1, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C} \}, \quad f_j(\alpha) = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n, j=1, 2.$$

由 $f_1 \neq 0, f_2 \neq 0, f_1 \neq cf_2, \forall c \in \mathbb{C}$, 知

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵之秩为 2。

因此其解空间维数为 $n-2$, 即 $\dim(E_1 \cap E_2) = n-2$ 。

但 $\dim E_1 + \dim E_2 = \dim(E_1 + E_2) + \dim(E_1 \cap E_2)$, 故有 $\dim(E_1 + E_2) = n$, 即 $E_1 + E_2 = V$ 。

现在, 任意的 $\alpha \in V$ 都可表为 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, 其中 $\alpha_1 \in E_1, \alpha_2 \in E_2$ 。注意到

$f_1(\alpha_1) = 0, f_2(\alpha_2) = 0$, 因此 $f_1(\alpha) = f_1(\alpha_2), f_2(\alpha) = f_2(\alpha_1)$ 。证毕。