首届全国大学生数学竞赛决赛试卷

（数学类，2010）

一、　填空题

(1) 设 $\beta > \alpha > 0$，则 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx =$______________.

(2) 若关于 x 的方程 $kx + \frac{1}{x^2} = 1 (k > 0)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内有惟一实数解，则常数 $k =$______________.

(3) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续. 由积分中值公式有 $\int_a^x f(t)dt = (x-a)f(\xi)$ $(a \le \xi \le x < b)$.若导数 $f_+'(a)$ 存在且非零，则 $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{\xi - a}{x - a}$ 的值等于______________.

(4) 设 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 6$，则 $\left((\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c})\right) \cdot (\vec{a} + \vec{c}) =$______________.

二、设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有定义，在 $x = 0$ 处可导，且 $f(0) = 0$． 证明：$\lim\limits_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{f'(0)}{2}$.

三、设 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上一致连续，且对于固定的 $x \in [0,\infty)$，当自然数 $n \to \infty$ 时 $f(x+n) \to 0$.

证明: 函数序列 $\{f(x+n):\ n = 1, 2, \cdots\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 0.

四、设 $D = \{(x,y): x^2 + y^2 < 1\}$， $f(x,y)$ 在 D 内连续，$g(x,y)$ 在 D 内连续有界，且满足条件：(1) 当 $x^2 + y^2 \to 1$ 时，$f(x,y) \to +\infty$；

(2) 在 D 中 f 与 g 有二阶偏导数，　$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^f$，　$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \ge e^g$.

证明：　$f(x,y) \ge g(x,y)$ 在 D 内处处成立.

五、设　$R = \{(x,y): 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\}$

$$R_\varepsilon = \{(x,y): 0 \le x \le 1-\varepsilon; 0 \le y \le 1-\varepsilon\}.$$

考虑积分 $I = \iint_R \frac{dxdy}{1-xy}$，　$I_\varepsilon = \iint_{R_\varepsilon} \frac{dxdy}{1-xy}$，　定义　$I = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} I_\varepsilon$.

（1） 证明$I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$；

（2）利用变量替换：$\begin{cases} u=\frac{1}{2}(x+y) \\ v=\frac{1}{2}(y-x) \end{cases}$ 计算积分 I 的值，并由此推出$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

六、已知两直线的方程：$L:x=y=z$，$L':\frac{x}{1}=\frac{y}{a}=\frac{z-b}{1}$.（1）问：参数$a,b$满足什么条件时，$L$与$L'$是异面直线？

（2）当L与L'不重合时，求L'绕L旋转所生成的旋转面π的方程，并指出曲面π的类型.

七、设A,B均为n阶半正定实对称矩阵，且满足$n-1\le \operatorname{rank} A\le n$. 证明: 存在实可逆矩阵C使得C^TAC和C^TBC均为对角阵.

八、设V是复数域$\mathbb{C}$上的n维线性空间，$f_j:V\to\mathbb{C}$（$j=1,2$）是非零的线性函数, 且线性无关.

证明: 任意的$\alpha\in V$都可表为$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$,使得

$$f_1(\alpha)=f_1(\alpha_2)，\quad f_2(\alpha)=f_2(\alpha_1).$$