

国家精品课程厦门大学高等代数: gdjpkc.xmu.edu.cn

国家精品资源共享课高等代数: www.icourses.cn/sCourse/course_3077.html

中国大学MOOC: 《高等代数(上)》www.icourse163.org/course/XMU-1001951004

中国大学MOOC: 《高等代数(下)》www.icourse163.org/course/XMU-1002554004

国内部分重点高校硕士研究生入学考试高等代数试题 (双线性型部分)

一. 填空题

1. 设 $f(\alpha, \beta)$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上三维线性空间 V 上的一个双线性函数, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是 V 的一组基, 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

是 $f(\alpha, \beta)$ 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的度量矩阵, 设 $\alpha = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \beta = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, 则 $f(\alpha, \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$. (2015年大连理工大学)

二. 选择题

三. 计算题

1. 形如 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ 的 $\mathbb{R}$ 上的矩阵形成一个线性空间 V , 定义 $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ 上的映射为

$$(A, B) = \frac{1}{2}(\det(A+B) - \det(A) - \det(B)).$$

(1) 证明这是一个双线性映射.

(2) 求其在基 $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \\ 1 & \end{pmatrix}$ 下的度量矩阵 M .

(3) 对于上述 M , 求 $f(X) = \frac{X'MX}{X'X}$ 的最大值与最小值(注: 用数学分析方法不给分). (2013年北京大学)

四. 证明题

1. 设 $f(\alpha, \beta) = g_1(\alpha)g_2(\beta)$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的欧氏空间 V 上的对称双线性函数, 且其中 g_1, g_2 是线性函数. 证明存在线性函数 $h(x)$, 以及 $k \neq 0 \in \mathbb{P}$ 使得 $f(\alpha, \beta) = kh(\alpha)h(\beta)$. (2012年北京大学)
2. 设 $f(X, Y)$ 为定义在数域 P 上的 n 维线性空间 V 上的一个双线性函数, 证明:

$$f(X, Y) = X'AY = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_iy_j$$

可以表示为两个线性函数

$$f_1(X) = \sum_{i=1}^n b_i x_i, f_2(Y) = \sum_{i=1}^n c_i y_i$$

之积的充分必要条件是 $f(X, Y)$ 的度量矩阵 A 的秩 $r(A) \leq 1$. (2009年华南理工大学)

3. 设 $f(x, y)$ 为线性空间 V 上的非退化双线性函数. 证明: 对于任何 $g \in V^*$, 存在唯一的 $\alpha \in V$ 使得 $g(\beta) = f(\alpha, \beta), \forall \beta \in V$.
4. 设函数 $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 为: $f(X, Y) = X'AY, X, Y \in \mathbb{R}^n$. 证明: f 不是零函数当且仅当存在 $X_0 \in \mathbb{R}^n$ 使得 $f(X_0, X_0) \neq 0$. (2010年四川大学)
5. 设 $M_n(\mathbb{R})$ 是所有 n 阶实方阵组成的线性空间, 设 $(-, -)$ 是 $M_n(\mathbb{R})$ 上的双线性型, 其定义为: 对任意 $X, Y \in M_n(\mathbb{R}), (X, Y) = \text{tr}(XY)$, 其中 tr 表示方阵的迹.

(1) 任取 $M_n(\mathbb{R})$ 的一组基: $A_1, A_2, \dots, A_{n^2}$. 证明: 存在 $M_n(\mathbb{R})$ 的唯一的一组基: $B_1, B_2, \dots, B_{n^2}$ 使得

$$(A_i, B_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j, \end{cases}$$

称 $B_1, B_2, \dots, B_{n^2}$ 是 $A_1, A_2, \dots, A_{n^2}$ 的对偶基.

(2) 对于 $M_n(\mathbb{R})$ 的基 $A_1, A_2, \dots, A_{n^2}$ 和基 $A'_1, A'_2, \dots, A'_{n^2}$, 设它们的由1给出的对偶基分别为 $B_1, B_2, \dots, B_{n^2}$ 和 $B'_1, B'_2, \dots, B'_{n^2}$, 证明: $\sum_{i=1}^{n^2} A_i B_i = \sum_{i=1}^{n^2} A'_i B'_i$. (2013年四川大学)

6. 设 $f: V \times V \rightarrow F$ 是数域 F 上的线性空间 V 上的对称双线性型, $\dim V = n$.

(1) 证明: 存在 V 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 使得当 $i \neq j$ 时有 $f(\alpha_i, \alpha_j) = 0$.

(2) 设非退化, 即对任意 $0 \neq \alpha \in V$ 都存在 $\beta \in V$ 使得 $f(\alpha, \beta) \neq 0$. 设 $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性变换, 满足: 对任意 $\alpha, \beta \in V$ 都有 $f(\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\beta) = f(\alpha, \beta)$. 证明: $\mathcal{A}$ 是可逆的, 并求出 $\mathcal{A}$ 在 V 的基下的矩阵的行列式. (2014年四川大学)

7. 设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间, $(,)$ 是 V 上的一个非退化双线性型, V^* 是 V 的对偶空间.

(1) V 的子集 $W = \{\alpha \in V | (\alpha, \alpha) = 0\}$ 是否是 V 的子空间? 说明理由.

(2) 证明: 对任意 $f \in V^*$, 都存在唯一的 $\alpha \in V$, 使得 $f(\beta) = (\alpha, \beta)$ 对任意 $\beta \in V$ 都成立. (2016年四川大学)

8. 设 $f(\alpha, \beta)$ 为 V 上的非退化双线性函数, 对 $\forall g(x) \in V^*$, 存在唯一的 $\alpha \in V$, 使得 $f(\alpha, \beta) = g(\beta), \forall \beta \in V$. (2014年武汉大学)

9. 定义所有 n 阶实方阵构成的实线性空间 V 上的对称双线性函数为 $f(X, Y) = \text{tr}(X^T Y), X, Y \in V$, 二次型 $Q(X) = f(X, X)$. 求 $Q(X)$ 的正负惯性指数. (2010年中科大)

10. 设 V 是 n 维复向量空间, $(-, -) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ 是反对称的非退化双线性型, $\varphi : V \rightarrow V$ 是一个线性变换,满足 $(\varphi(u), \varphi(v)) = (u, v), \forall u, v \in V$. 证明

(1) V 的维数是偶数.

(2) φ 是可逆的线性变换.

(3)若 λ 是 φ 的特征值,则 $\frac{1}{\lambda}$ 也是 φ 的特征值. (2015年国科大)

11. 设 V 是实数域上的 n 阶方阵全体所构成的线性空间, f 是 V 上的实值非零线性函数,满足

$$\forall A, B \in V, f(AB) = f(BA).$$

证明: $g(A, B) = f(AB)$ 是 V 上的非退化双线性函数. (2013年中南大学)

12. 设 V 是数域 F 上一个 n 维线性空间, f 是 V 上的一个双线性函数,令

$$V_1 = \{x \in V : f(x, y) = 0, \forall y \in V\};$$

$$V_2 = \{x \in V : f(x, y) = 0, \forall x \in V\};$$

证明: V_1, V_2 都是 V 的子空间,且维数相等. (2014年中山大学)

13. 记 $\mathbb{R}_5$ 为次数小于5的实多项式全体构成的向量空间,在 $\mathbb{R}_5$ 上定义双线性函数如下

$$(f(x), g(x)) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$

(1)证明:上式定义了 $\mathbb{R}_5$ 上一个正定的对称双线性函数;

(2)用Gram-Schmidt方法由 $1, x, x^2, x^3$ 求 $\mathbb{R}_5$ 的一个正交向量组;

(3)求一个形如 $f(x) = a + bx^2 - x^4$ 的多项式,使得它与所有次数低于4的实多项式正交. (2015年中山大学)

(林秋林 林鹭 整理)