国内部分重点高校硕士研究生入学考试高等代数试题
(特征值、特征多项式部分)

一. 填空题

1. 如果$\alpha = (1,1,2,0)'$是4阶方阵A的属于特征值2的一个特征向量, 则它一定也是方阵A^3-2A^2-3E的属于特征值________的一个特征向量. (2009年北京工业大学)

2. 已知3阶方阵A的特征值是方程$x^3=1$的三个不同根, 则$|A+E|=$________. (2014年北京工业大学)

3. 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$, 则$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4=$________. (2016年北京工业大学)

4. 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$, 则$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=$________. (2017年北京工业大学)

5. 设A是n阶矩阵, $|A|\neq 0$, 若A^*是A的伴随矩阵. 若A有特征值λ, 则$(2A^*)^{-1}$必有一个特征值是________. (2009年北京交通大学)

6. 设向量$\alpha=(1,k,1)^T$是矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$的逆矩阵$A^{-1}$的特征向量, 则常数$k$需要满足的条件是________. (2009年北京交通大学)

7. 设$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 则$A$的最小多项式为________. (2009年北京交通大学)

8. 设$\alpha=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$是矩阵$A=\begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$的特征向量, 则$a=$________. (2010年北京交通大学)

9. 设$\mathbb{R}[x]_3$是次数小于3的所有实系数多项式组成的线性空间, $\mathbb{R}[x]_3$的线性变换T满足: 对任意$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}[x]_3$, $Tf(x) = (a_1 + a_2) + (a_0 + a_2)x + (a_0 + a_1 + 2a_2)x^2$, 则线性变换的特征值为________. (2010年北京交通大学)

10. 矩阵

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

的最小多项式为________. (2010年北京交通大学)

11. 设$-2, 3, -1$是三阶方阵A的特征值, 则$|A^3 - 6A + 11E| =$________.(E为单位矩阵) (2011年北京交通大学)

12. 设$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$为三阶方阵$A$ 的全部特征值, 且有相应的特征向量依次为$(1,1,1)', (0,1,1)', (0,0,1)'$, 则$A^n =$________. (2013年北京交通大学)

13. 设$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$有三个线性无关的特征向量, 则$x$和$y$应满足的条件为________. (2013年北京交通大学)

14. 设4阶方阵A有特征值$1, 2, 2, 3$, 则$|A^{-1} + 3E| =$______, $|A^*| =$______. (2017年北京交通大学)

15. 设A是元素都是1的n阶方阵, 则A的最小多项式为________. (2017年北京交通大学)

16. 若n维线性空间V的线性变换σ有n个不同的特征值, 则σ有______个不变子空间. (2017年北京交通大学)

17. 设3阶矩阵A, B相似, 矩阵A的特征值为$1, 2, 3$, 则$|B| =$________. (2010年北京科技大学)

18. 设$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & 4 & -3 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, 且$A$有一特征值$\lambda = 6$, 则$a =$________. (2011年北京科技大学)

19. 设u是n维列向量, $(u, u) = 1$, $H + E - 2uu'$, 则$\lambda = 1$是H的______重特征值. (2013年北京科技大学)

20. 设矩阵A的特征多项式为$f(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$, 则$A$可逆, A^{-1}的特征多项式为________. (2015年大连理工大学)

21. 已知4阶不可逆矩阵A的三个特征值是$\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$, 那么行列式$|A+2E|=$________. (2014年湖南师范大学)

22. 已知2016阶方阵A的全部特征值$\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=2,\cdots,\lambda_{2015}=2014,\lambda_{2016}=2015$, 且$P$是2016 阶可逆矩阵, 则$|E+P^{-1}AP|=$________. (2016年湖南师范大学)

二. 选择题

1. 如果n阶实矩阵$A=-A^{'}$, 则其特征值λ的平方(　). (2009年北京工业大学)

(A)$\lambda^2=0$　　(B)$\lambda^2>0$

(C)$\lambda^2\leq 0$　　(D)与0不可比较

2. $\lambda_1,\lambda_2(\lambda_1\neq\lambda_2)$是实对称矩阵$A$的特征值, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是属于λ_1的一个线性无关的特征向量组, β_1,β_2是属于λ_2的一个特征向量组, 则(　). (2010年北京工业大学)

(A)$\alpha_1,\alpha_2,\beta_2$一定线性无关　　(B)$\alpha_1,\alpha_3,\beta_1$一定是正交向量组

(C)α_1,β_1,β_2一定线性无关　　(D)α_1,β_1,β_2一定线性相关

3. 如果n阶实矩阵$A=rA^{'}(r\neq 0)$, 则A的特征值λ及其共轭$\overline{\lambda}$之间的关系是(　). (2010北京工业大学)

(A)$\overline{\lambda}=r\lambda$　　(B)$\lambda=r\overline{\lambda}$

(C)$\overline{\lambda}=-r\lambda$　　(D)没有确定的关系

4. 若α是n阶矩阵A的一个属于特征值θ的特征向量, 则(　). (2011年北京工业大学)

(A)α仍是A^2+A的一个特征向量

(B)对实数λ, $\lambda\alpha$仍是A^2+A的一个特征向量

(C)$\theta^2+\theta$一定是A^2+A的一个特征值

(D)$\theta^2+\theta$不一定是A^2+A的一个特征值

5. 已知0, 1是3阶实对称矩阵A的特征值, α 是属于0的一个线性无关的特征向量组, β_1,β_2是属于1 的一个特征向量构成的正交向量组, 则(　). (2011年北京工业大学)

(A)$\alpha_1,\alpha_2,\beta_2$一定线性相关　　(B)$\alpha_1,\alpha_3,\beta_1$一定是正交向量组

(C)α_1,β_1,β_2一定线性无关　　(D)α_1,β_1,β_2一定是正交向量组

6. 若0, 1是实对称矩阵A的特征值, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是属于0的一个线性无关的特征向量组, β_1,β_2是属于1的, 由特征向量组构成的正交向量组, B表示α,β_1,β_2 作为列向量形成的正交向量组, $B=(\alpha,\beta_1),\beta_2$. 则(　). (2012年北京工业大学)

(A)α,β_1,β_2一定线性相关　　(B)α,β_1,β_2一定是正交向量组

(C)B一定正交矩阵　　(D)$B^{'}B$一定是对角阵

7. 若λ是实正交矩阵A的特征值, α是A的特征向量, 则(　). (2012年北京工业大学)

(A)λ是1或-1　　(B)任意给定实系数多项式$f(x)$, $f(\lambda)$总是$f(A)$的特征值

(C)α是A^{-1}的特征向量　　(D)前三个选项都不正确

8. 已知3阶方阵A的特征值为$0,2,-1$, 则行列式$|A^2+A+E|$的值为(　). (2015年北京工业大学)

(A)1　　(B)0

(C)7　　(D)14

9. 设λ_1,λ_2分别是方阵A的两个不同的特征值, α_1,α_2分别是它们对应的特征向量, 则向量组$\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关的充分必要条件是(　). (2015 年北京工业大学)

(A)$\lambda_1\neq 0$　　(B)$\lambda_2\neq 0$

(C)$\lambda_1=0$　　(D)$\lambda_2=0$

10. 下列说法正确的是(　). (2016年北京工业大学)

(A)数域$\mathbb{P}$上两线性空间同构的充要条件是它们的维数相等

(B)设矩阵A满足$A^2=E$, 则1与-1一定是A的特征值

(C)正交变换在任意基下的矩阵都是正交矩阵

(D)任意对称矩阵的特征值都是实数

11. 下列说法正确的有_____个. (2016 年北京交通大学)

(1)数域P上上n阶矩阵A相似于对角阵的充要条件是A的最小多项式是P上互素的一次因式之积;

(2)两个矩阵有相同的最小多项式, 则它们是相似矩阵;

(3)n阶矩阵A的任一特征根都是最小多项式的根;

(4)n阶矩阵A的最小多项式的根都是A的特征根.

(A)1　　(B)2

(C)3　　(D)4

12. 设A是n阶矩阵, P是n阶可逆矩阵, n维列向量矩阵α是矩阵A的属于特征多项式λ的特征向量, 那么在下列矩阵中:(1)A^2; (2)$P^{-1}AP$; (3)A^T; (4)$E-\frac{1}{2}A$. α一定是其特征向量的矩阵共有_____个. (2016年北京交通大学)

(A)1　　(B)2

(C)3　　(D)4

13. 设n阶方阵$(a_{ij})_{n\times n}$的特征值为$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$, 则$\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i^2$ 的值为(　). (2017年北京交通大学)

(A)$\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}^2$　　(B)$(\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii})^2$

(C)$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}a_{ji}$　　(D)$\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}^2$

三.计算题

1. 设V是全体次数不超过n的实系数多项式组成的线性空间. 定义线性变换$A: f(x)\longrightarrow f(1-x)$, 求$A$的特征值和对应的特征子空间. (2016北京大学)

2. 设

$$A=\begin{pmatrix} a & -2 & 0\\ b & 1 & -2\\ c & -2 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

(1)若A有特征值$4,1,-2$, 求a,b,c.

(2)设$\alpha=(1,k,1)'$是B^{-1}的一个特征向量, 求k. (2011年北京交通大学)

3. 已知三阶实对称矩阵A有特征值0(二重)和2. 若$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ 是A的属于特征值0的特征向量.

(1)求正交矩阵P, 使得$P^{-1}AP$为对角阵;

(2)求矩阵A. (2012北京交通大学)

4. 设V是有理数域$\mathbb{Q}$上的三维空间, V的线性变换T在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

求T的特征值和相应的特征向量; 又问: A可否对角化? (2013年北京交通大学)

5. 求三阶实对称矩阵A, 使得A的特征值为$3,1,1$, 且$(1,1,0)'$是A属于3的特征向量. (2015年北京交通大学)

6. 设矩阵$A=\begin{pmatrix} a & -1 & c\\ 5 & b & 3\\ 1-c & 0 & -a\end{pmatrix}$, $|A|=-1$, A的伴随矩阵A^*有一个特征值λ_0, 属于λ_0的特征向量为$\alpha=(-1,-1,1)^T$, a,b,c 和λ_0的值. (2016北京交通大学)

7. 设A为三阶矩阵, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为线性无关的三维列向量, 且

$$A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, A\alpha_2=2\alpha_2+\alpha_3, A\alpha_3=2\alpha_2+3\alpha_3.$$

(1)求矩阵B, 使$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$;

(2)求矩阵A的特征值;

(3)求可逆矩阵P, 使得$P^{-1}AP$为对角矩阵. (2017年北京交通大学)

8. 设$P[x]_3$是次数不超过3的多项式全体连同0多项式构成的线性空间, $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\in P[x]_3$, 现有$P[x]_3$的线性变换$\mathscr{A}$:

$$\mathscr{A}(f(x))=(a_0-2a_1)+(-3a_0+2a_1)x+(2a_2-3a_3)x^2+(-4a_2+3a_3)x^3$$

求$\mathscr{A}$的特征值及特征向量, 并判定$\mathscr{A}$能否对角化. (2013年北京科技大学)

9. 设A是三阶矩阵, $r(A)=2$, 其二重特征值$\lambda_1=\lambda_2=6$, 且属于$\lambda_1=\lambda_2=6$的线性无关的特征向量有$\alpha_1=(1,1,0)^t$, $\alpha_2=(2,1,1)^t$, 求矩阵A. (2009年北京师范大学)

10. 令

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\1&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

计算$A^2,A^3,\cdots,A^{n-1},A^n$, 并求出$A$在复数域$C$中的全部特征值. (2016年北京师范大学)

11. 设四阶实矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&s&s&s\\s&1&s&s\\s&s&1&s\\s&s&s&1\end{pmatrix}$$

(1)求A的特征值及所有特征向量;

(2)A的可逆的充要条件是什么? 当$s=-1$时, A是否可逆? 若A可逆, 求A的逆矩阵A^{-1};

(3)s为何值时, A是正定矩阵? . (2011年大连理工大学)

12. 设A和B都是n阶方阵, 且$r(A)+r(B)<n$, 其中$r(A)$ 表示A的秩, 证明: A和B至少有一个公共特征向量. (2013年大连理工大学)

13. 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & c \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}$$

已知A的行列式$|A|=-1$, A的伴随矩阵A^*有一个特征值λ_0, 且A^*属于λ_0的一个特征向量是$\alpha=(-1,-1,1)'$, 试求a,b,c和λ_0的值. (2015年湖南师范大学)

14. 在数域P上的2×2矩阵空间$P^{2\times 2}$中, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 定义线性变换$\mathscr{A}$如下:

$$\mathscr{A}(X)=XB-BX,\forall X\in P^{2\times 2}$$

试求:

(1)$\mathscr{A}$的特征多项式;

(2)$\mathscr{A}$的属于特征值0的特征向量. (2016年湖南师范大学)

15. 设$\mathscr{A}$是n维线性空间V上的秩为1的线性变换, $\mathscr{B}=\mathscr{A}-\varepsilon$(其中$\varepsilon$为恒等变换), 试求线性变换$\mathscr{B}$的最小多项式. (2009年华东师范大学)

16. 求一个3阶实对称矩阵A, 满足: 特征值为$6,3,3$, 且6对应的特征向量为$a_1=(1,1,1)^T$. (2015年华东师范大学)

17. 举例说明4阶复矩阵即使有相同的特征多项式和极小多项式也不一定相似. (2017年华东师范大学)

18. 已知矩阵$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & a \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$的特征多项式有二重根, 求$a$的值, 并讨论是否可对角化. (2019年华东师范大学)

19. 设$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$为非零实$1\times n$矩阵, 求:

(1)$r(A'A)$;

(2)$A'A$的特殊值和特征向量. (2010年华南理工大学)

20. 用J表示元素全为1的n阶矩阵, $n\geq 2$, 设

$$f(x)=a+bx$$

是有理数域$\mathbb{Q}$上的一元多项式, 令$A=f(J)$,

(1)求J的全部特征值和全部特征向量;

(2)求A的所有特征子空间;

(3)A是否可对角化? 如果可对角化, 求出$\mathbb{Q}$上一个可逆矩阵P, 使得$P^{-1}AP$为对角矩阵, 并写出这个对角矩阵. (2011年华南理工大学)

21. 设
$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$
求一个正交矩阵T使得$T^{-1}AT$ 是对角阵. (2013年四川大学)

22. 设A是数域F上的特征值全为0的三阶方阵.

（1）写出A的所有可能的Jordan标准型.

（2）设F上的多项式$f(x)$ 满足$f(0)\neq 0$.证明：$f(A)$ 可逆，且$(f(A))^{-1}$ 是A的多项式.

（3）设$g(x)=x^{11}-x^5-x^4+x^3+x-3$.求行列式$det(g(A))$. (2017年四川大学)

23. 设$\mathcal{A}$ 是复数域上的n维线性空间V上的一个线性变换$n\geq 3$ ，且$\mathcal{A}$ 在V的某个基下的矩阵为：
$$D=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&0&6\\1&0&0&\cdots&0&0&6\\0&1&0&\cdots&0&0&-12\\0&0&1&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0&0\\0&0&0&\cdots&0&1&0\end{pmatrix}.$$
（1）求A的特征多项式$f(\lambda)$.

（2）$f(\lambda)$ 在有理数域上是否可约？说明理由.

（3）设W是V上的所有与$\mathcal{A}$ 可交换的线性变换组成的集合，证明：W是V的子空间并求出它的维数.

（4）求$\mathcal{A}$ 的所有不变子空间的个数. (2019年四川大学)

24. 设$\mathcal{A}$ 是复数域上的n维线性空间V上的一个线性变换$n\geq 3$ ，且$\mathcal{A}$ 在V的某个基下的矩阵为：
$$D=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&0&6\\1&0&0&\cdots&0&0&6\\0&1&0&\cdots&0&0&-12\\0&0&1&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0&0\\0&0&0&\cdots&0&1&0\end{pmatrix}.$$
（1）求A的特征多项式$f(\lambda)$.

（2）$f(\lambda)$ 在有理数域上是否可约？说明理由.

（3）设W是V上的所有与$\mathcal{A}$ 可交换的线性变换组成的集合，证明：W是V的子空间并求出它的维数.

（4）求$\mathcal{A}$ 的所有不变子空间的个数. (2019年四川大学)

25. 设$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&-1&-1&0\\1&1&1&0\\2&2&2&0\end{pmatrix}$，求A的若当标准形. (2012年云南大学)

26. 设a,b 是两个复数，根据不同的a,b ，求n阶上三角矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a&b&\cdots&b&b\\0&a&\cdots&b&b\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a&b\\0&0&\cdots&0&a\end{pmatrix}$$

的最小多项式和若当标准型. (2010年浙江大学)

27. 设

$$\begin{pmatrix}3&2&-2\\k&-1&-k\\4&2&-3\end{pmatrix}.$$

（1）当k为何值时，存在P使得$P^{-1}AP$ 为对角矩阵？并求出这样的矩阵P和对角矩阵;

（2）求$k=2$ 时矩阵A的Jordan标准型. (2012年浙江大学)

28. 设

$$A=\begin{pmatrix}0&E_n\\E_n&0\end{pmatrix}.$$

请问A是否可以对角化并给出理由.若A可对角化为C，给出可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=C$.(2014年浙江大学)

29. 已知实方阵$A=\begin{pmatrix}0&0&a\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ 与$B=\begin{pmatrix}0&0&a^2\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ 相似，求a. (2011年中科大)

item 设循环矩阵C为

$$\begin{pmatrix}c_0&c_1&\cdots&c_{n-1}\\c_{n-1}&c_0&\cdots&c_{n-2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_1&c_2&\cdots&c_0\end{pmatrix}$$

(1)求C的全部特征值以及相应的特征向量.

(2)求$|C|$. (2010年国科大)

30. 已知n阶矩阵$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ 的特征多项式为$(\lambda-1)^2$,试求$A^{2011}-2011A$.(2011年国科大)

31. 已知n阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix},$$

其中$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i=1, \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2=n$.

(1)求A的全部特征值.

(2)求A的行列式和迹. (2012年国科大)

32. 设

$$\begin{pmatrix} x_{3n} \\ x3n+1 \\ x_{3n+2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{3n-3} \\ x3n-2 \\ x_{3n-1} \end{pmatrix}.$$

给定初值$a_0=5, a_1=7, a_2=8$,求x_n 的通项. (2017年国科大)

33. 设A是n阶实对称矩阵,且

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & b_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}, b_j \neq 0.$$

(1)证明$r(A) \geq n-1$.

(2)证明A的特征值各不相同. (2017年国科大)

34. 证明:8个满足$A^3=0$ 的5阶复数矩阵中必有两个相似. (2018年国科大)

四.证明题

1. 三阶实矩阵A的特征多项式为x^3-3x^2+4x-2. 证明: A不是对称阵也不是正交阵. (2016年北京大学)

2. 设V是全体次数不超过n的实系数多项式组成的线性空间. 定义线性变换

$$A: f(x) \to f(1-x)$$

求A的特征值和对应的特征子空间. (2016年北京大学)

3. 证明n阶$Hermite$矩阵A有n个实特征值(考虑重数). (2017年北京大学)

4. 证明: 实矩阵$\begin{pmatrix} d & a & b & 0 \\ a & 0 & a & 0 \\ b & a & -d & a \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}$ $(a \neq 0)$有两个正的特征值, 两个负的特征值. (2010年北京工业大学)

5. 若n(自然数$n \geq 1$)阶实矩阵A和实数r满足$A = rA'$, 复数$a + bi$是A的特征值, 则$ab = 0$. (2012年北京工业大学)

6. 设A是n阶实对称矩阵, 证明:

(1)A的特征值都是实数;

(2)A的属于特征值的两个特征向量的对应分量乘积和为0. (2013 年北京工业大学)

7. 设A, B是实数域上的n阶矩阵, $f(x)$是矩阵B的特征多项式, 令$f^{(k)}(x)$表示$f(x)$的k阶导数. $C = AB - BA$. 假定C与A, B可交换. 证明:

(1)对任意整数k, 由$AB^k - B^kA = kB^{k-1}C$;

(2)对每个正整数$k \leq n$, 有$f^{(k)}(B)C^k = 0$, 特别地, 有$C^m = O_{n\times n}$;

(3)若A, B均为实对称矩阵, 则$AB = BA$. (2014年北京工业大学)

8. 设$\mathscr{A}$是n维线性空间V上的一个线性变换.

(1)设λ_1, λ_2是$\mathscr{A}$的两个不同特征值, α_1, α_2是分别属于λ_1, λ_2的特征向量, 证明: $\alpha_1 + \alpha_2$不是$\mathscr{A}$的特征向量;

(2)若$\mathscr{A}$以V中每一个非零向量为它的特征向量, 证明: $\mathscr{A}$ 是数乘变换, 即: 存在k使得$\mathscr{A}\alpha = k\alpha$. (2014年北京工业大学)

9. 设V为实数域上全体n阶方阵在通常的运算下构成的线性空间, σ为V上的线性变换, 且对任意的$A \in V$都有$\sigma(A) = A'$.

(1)求σ的特征值;

(2)对于每一个特征值, 求其特征子空间;

(3)证明V恰为所有特征子空间的直和. (2018年北京工业大学)

10. 设n阶矩阵A, B满足$AB = A - B$, 证明:

(1)$\lambda = 1$不是B的特征值;

(2)若B相似于对角矩阵, 则有可逆矩阵T, 使$T^{-1}AT$与$T^{-1}BT$均为对角阵. (2016年北京交通大学)

11. 设A, B是n阶非零矩阵, 且有$A^2 = A, B^2 = B, AB = BA = 0$. 证明:

(1)0, 1必是A, B的特征值;

(2)若ξ是A的属于特征值1的特征向量, 则ξ也是B的属于特征值0的特征向量. (2009年北京科技大学)

12. 设$\mathscr{A}$是线性空间V上的线性变换, 满足$\mathscr{A}^2 - 3\mathscr{A} + 2I = 0$, 其中$I$是恒等变换. 证明$\mathscr{A}$的特征值只能是1或2. (2012年北京科技大学)

13. 已知$\mathscr{A}$是n维线性空间V上的线性变换, 且$\mathscr{A}^2 = Id_V$, 证明:

(1)$\mathscr{A}$的特征值为± 1;

(2)$V = V_1 \oplus V_2$, 其中V_1, V_2分别是特征根$1, -1$组成的线性空间. (2017年北京科技大学)

14. 如果$A^*=A$, 证明A的特征值为实数. (2011年北京师范大学)

15. $S=(a_{ij})_{n\times n}$是一个随机矩阵, 且满足: $a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}=1,(i=1,2,\cdots,n)$. 证明:

(1)S有特征值1;

(2)S的特征值$|\lambda|\le 1$. (2014年北京师范大学)

16. 设$g(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^m$是数域$F$上一个多项式. 证明: 如果$\lambda_0$是$F$上$n$阶方阵$A$的一个特征值, 且$\alpha$是$A$的属于$\lambda_0$的一个特征向量, 那么$g(\lambda_0)$是$g(A)$的一个特征值, 且$\alpha$是$g(A)$的属于$g(\lambda_0)$的一个特征向量. (2016年北京师范大学)

17. 设A是n阶矩阵, 且满足$A^3-2A^2-A+2I=O$, 证明: $r(A-I)+r(A+I)+r(A-2I)=2n$. (2019年北京师范大学)

18. 设A,B为复数域上的n阶矩阵, 且$AB=BA$. 求证: A与B具有相同的特征向量. (2009年大连理工大学)

19. 设A,B均为n阶矩阵. (2018年大连理工大学)

(1)证明: AB与BA有相同的特征多项式.

(2)若$A+B$, $A-B$均可逆, 证明: 分块矩阵$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$可逆并求其逆.

20. 设$\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$是$n$个实数, C是如下的n阶方阵

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

(1)若λ是C的特征值, 试证: $(1,\lambda,\lambda^2,\cdots,\lambda^{n-1})'$是特征值$\lambda$的特征值向量; (2009年湖南大学)

21. 设V是复数域C上的线性空间, σ和τ均为V上的线性变换, 且满足$\sigma\tau=\tau\sigma$, 又设λ_0为σ的一个特征值, 证明:

(1)V_{λ_0}为τ的不变子空间, 其中$V_{\lambda_0}=\{\alpha\in V|\sigma\alpha=\lambda_0\sigma\}$ 为σ的特征子空间;

(2)σ与τ至少有一个公共的特征向量. (2011年湖南大学)

22. 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$, 且$|A|=0$, 证明: A的伴随矩阵A^*的n个特征值中至少有$n-1$个为0, 且一个非零特征值(如果存在)等于$A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn}$, 其中$z$为任意的$n$维列向量. (2011年湖南大学)

23. 设A,B分别为$n\times m$阶和$m\times n$阶矩阵,

(1)证明: $\lambda^m|\lambda E_n-AB|=\lambda^n|\lambda E_m-BA|$, 其中$E_n$和$E_m$分别为$n$阶和$m$阶单位阵;

(2)若

$$A=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

求矩阵E_n+A的全部特征值. (2012年湖南大学)

24. 设A为实对称矩阵, 其特征值满足$\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n$, 证明:

(1)对任意非零实向量$x\in\mathbb{R}^n$, 均有$\lambda\le\frac{x^{'}Ax}{x^{'}x}\le\lambda_n$;

(2)设B为n阶实对称正定矩阵, 则$\lambda=\min\limits_{\lambda\in\mathbb{R}^n}\frac{x^{'}Ax}{x^{'}Bx}$, 其中$\lambda$为矩阵$AB^{-1}$的最小特征值. (2012年湖南大学)

25. 设$\mathscr{A}$为n维线性空间V上的线性变换, 且$\mathscr{A}^2=\varepsilon$, 其中$\varepsilon$为$V$上的单位变换. 证明:

(1)$\mathscr{A}$的特征值只能是±1;

(2)$V=V_1\oplus v_{-1}$, 其中v_1和V_{-1}分别为线性变换$\mathscr{A}$关于特征值1和-1的特征子空间;

(3)存在V上的线性换$\mathscr{A}_1$和$\mathscr{A}_2$, 使得$\mathscr{A}_1+\mathscr{A}_2=\varepsilon$, 且$\mathscr{A}=\mathscr{A}_1-\mathscr{A}_2$. (2012年湖南大学)

26. 设A是n阶方阵, 证明:

(1)A的秩为1的充分必要条件是存在两个n阶非零向量$\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n$, 使得$A=\alpha\beta^T$;

(2)$A=\alpha\beta^T$时, A的特征值是$0,0,\cdots,0,\beta^T\alpha$. (2015年湖南大学)

27. 设

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

其中P为n阶置换矩阵, 它的每一行每一列均只有一个元素为1, 其余元素为0.

(1)证明存在$n-1$次多项式$f(\lambda)$, 使得$A=f(P)$;

(2)求矩阵A的所有特征值与特征向量;

(3)计算行列式$|A|$. (2017年湖南大学)

28. 设$m_A(x),m_B(x)$分别为n阶方阵A和B的最小多项式, $\lambda_A(x)$为矩阵A的特征多项式, 试问当$m_A(x)$与$m_B(x)$互素时, $\lambda_A(B)$是否可逆? 证明你的结论. (2017年湖南大学)

29. 已知实数$a_1,a_2,\cdots,a_n$满足$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=0$, 令

$$A=\begin{pmatrix} a_1^2+1 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2+1 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}a_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2+1 \end{pmatrix}$$

(1)证明: 存在一个$n\times 2$矩阵B, 使得$A=BB^{'}$;

(2)求n阶实矩阵A的特征值. (2011年湖南师范大学)

30. 设A为n阶实方阵, $A^{'}$是A的转置矩阵, 且$A+A^{'}=J-E$, 其中J和E分别是元素全为1的n阶矩阵和单位矩阵.

(1)对任一复向量α, 证明: $0\le \overline{\alpha}^{'}J\alpha\le n\overline{\alpha}^{'}\alpha$, 其中$\overline{\alpha}^{'}$ 是α的共轭转置.

(2)证明: A的任一特征值的实部在$-\frac{1}{2}$和$\frac{n-1}{2}$之间. (2012 年湖南师范大学)

31. 设A,B为n阶方阵, $f_A(x)$为A的特征多项式, 证明: $f_A(B)$可逆的充要条件是A,B没有公共的特征值. (2013年湖南师范大学)

32. 设有方阵$A\in M_{m+n}(K)$, 且$a_{ij}=0$, $1\le i,j\le m$或$m+1<i,j\le m+n$. 证明: 若λ_0为A的特征值, 则$-\lambda_0$也为A的特征值. (2011年华东师范大学)

33. 设矩阵$A\in M_n(\mathbb{C})$的特征值互不相同. 定义$C(A)=B\in M_n(\mathbb{C})|AB=BA$.

(1)验证: $C(A)$是复线性空间$M_n(\mathbb{C})$的线性子空间.

(2)证明: 对任意$B,C\in C(A)$, 有$BC=CB$. (2014年华东师范大学)

34. 域$\mathbb{C}$上全体n阶矩阵组成一个n^2维线性空间$M_n(\mathbb{C})$, $A\in M_n(\mathbb{C})$, A可对角化, 特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$(不一定不相等), 设$\mathscr{A}$是域$\mathbb{C}$的变换, $\mathscr{A}(B)=AB-BA$,

(1)证明: $\mathscr{A}$为域$\mathbb{C}$上的线性变换;

(2)求A的所有n^2个特征值. (2015年华东师范大学

35. 已知实矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix},$$

满足$b_ic_i>0,(i=1,2,\cdots,n-1)$. 求证: A有n个两两不同的实特征值. (2016年华东师范大学)

(提示: 先考虑$b_i=c_i(i=1,2,\cdots,n-1)$的特殊情况; 对一般情况, 试找出一个实对角可逆矩阵D使得$D^{-1}AD$符合该特殊情况.

36. 给定$m+n$分块方阵

$$A=\begin{pmatrix} O_{m\times m} & B_{m\times n} \\ C_{n\times m} & O_{n\times n} \end{pmatrix},$$

证明: 若λ为A的特征值, 则$-\lambda$也是A的特征值. (2017年华东师范大学)

37. 求证: 3阶复矩阵A与B相似的充要条件是它们有相同的特征多项式和极小多项式. (2017年华东师范大学)

38. 证明: (1)若$\lambda\neq 0$是A的一个特征值, 则$\frac{1}{\lambda}|A|$也是A的伴随矩阵A^*的特征值;

(2)若α是矩阵A的一个特征向量, 则α也是A^* 的一个特征向量. (2014年华南理工大学)

39. 设A是数域$\mathbb{C}$上的一个n阶方阵.

(1)设λ_1是A的一个特征值, 证明: 存在$\mathbb{C}$ 上n阶可逆方阵T, 使得(2017年华南理工大学)

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix};$$

(2)对n作归纳法证明, A必相似于一个上三角矩阵:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ & \lambda_2 & \cdots & c_{2n} \\ & & \cdots & \vdots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

40. 设F，K都是数域且$F\subseteq K$.设A，B是F上的n阶方阵.证明：A，B在F上相似当且仅当A，B在K上相似.(2011 年四川大学)

41. 证明：反对称实矩阵的特征值只能是0或纯虚数.(2012年四川大学)

42. 证明：数域F上的有限维空间上的线性变换只有有限多个特征值.举一个有无穷多个特征值的线性变换的例子.(2012年四川大学)

43. 设A是对角元为$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的上三角阵，B是对角元为$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 的上三角阵，且B可逆.求矩阵$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ 的特征值.(2012年四川大学)

44. 设数域F上的4阶方阵A的特征多项式为$f(x) = det(xE_4 - A) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$ ，其中E_4 是单位阵.

（1）对满足上述条件的矩阵A在相似意义下进行分类，可以分为几类？说明理由.

（2）证明：4维向量空间F^4 不能分解为A的特征子空间的直和当且仅当A^2, A, E_4 线性无关.

（3）当$A^2 + aA + bE_4 = 0$ 时求a,b的值. (2014年四川大学)

45. 设A是数域F上的n阶方阵，秩为r.证明：$A^2 = 0$ 当且仅当A在F上相似于分块矩阵$\begin{pmatrix} 0_r & 0 \\ I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，其中，$0_r, I_r$ 分别是r阶零矩阵和r阶单位阵. (2016年四川大学)

46. 设A是n阶实对称阵，$n > 1$.设A的元全为1.求正交阵T使得$T^{-1}AT$ 是对角阵. (2017年四川大学)

47. 设A是数域F上的特征值全为1的三阶方阵.

（1）设$C(A)$ 是F上的所有与A可交换的矩阵组成的线性空间.求$C(A)$ 的维数$dimC(A)$.

（2）设F上的方阵B满足$AB = BA$ 且B在F上相似于一个Jordan阵.证明：AB在F上也相似于一个Jordan阵. (2017年四川大学)

48. 设A是n阶实对称矩阵，设A是正交阵，证明：A的极小多项式的次数不超过2. (2019年四川大学)

49. 设3阶实对称矩阵A的各行元素之和为3，向量$\alpha_1 = (-1, 2, -1)^T, \alpha_2 = (0, -1, -1)^T$ 是线性方程组$Ax = 0$ 的两个解.

（1）求A的特征值与特征向量;

（2）求正交矩阵Q和对角矩阵D，使得$Q^TAQ = D$;

（3）求行列式

$$|(\frac{2}{3}B^2)^{-1} + \frac{4}{9}B^* + B|,$$

其中B是$A - \frac{3}{2}E$ 的相似矩阵，B^* 是B的伴随矩阵. (2010年武汉大学)

50. 设V是数域F上的n维线性空间，σ 是V的线性变换，且存在$\xi \in V$ 使得$\xi, \sigma(\xi), \cdots, \sigma^{n-1}(\xi)$ 构成V的一个基，试求σ 的特征多项式和最小多项式. (2010年武汉大学)

51. 设$f(\lambda), m(\lambda)$ 分别为数域F上矩阵A的特征多项式和最小多项式，且有标准分解式

$$f(\lambda) = p_1(\lambda)^{r_1}p_2(\lambda)^{r_2}\cdots p_t(\lambda)^{r_t}, m(\lambda) = p_1(\lambda)^{s_1}p_2(\lambda)^{s_2}\cdots p_t(\lambda)^{s_t},$$

其中$r_i \geq 0, s_i \geq 0$ ，而$p_i(\lambda)$ 是数域F上的不可约多项式，$i = 1, 2, \cdots, t$.

求证：矩阵$p_i(A)^{s_i}$ 的零度即它的核空间的维数等于$r_i deg(p_i(\lambda))$.(2011年武汉大学)

52. 设A为n阶幂零矩阵（有正整数k，使得$A^k = 0$）.

1.求A的所有特征值;

2.设$r(A)=r$ ，则$A^{r+1}=0$;

3.求$det(I+A)$.(2012年武汉大学)

53. 对任意n阶复方阵A都存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=GS$ ，其中G，S都是对称方阵，而且G可逆. (2012年武汉大学)

54. 已知

$$A=\begin{pmatrix} 0 & & & & & -c_0 \\ 1 & 0 & & & & -c_1 \\ & 1 & 0 & & & \vdots \\ & & 1 & \ddots & & -c_{n-3} \\ & & & \ddots & 0 & -c_{n-2} \\ & & & & & -c_{n-1} \end{pmatrix},$$

1.求F的特征多项式$f(x)$ 与最小多项式$m(x)$;

2.求所有与F可交换的矩阵. (2014年武汉大学)

55. 已知A为实正交矩阵，$det(A)=1$ ，证明存在正交矩阵P，使得

$$P'AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

其中$\cos\theta=\dfrac{a_{11}+a_{22}+a_{33}-1}{2}$ (2015年武汉大学)

56. 证明数λ 是方阵A的特征多项式的根当且仅当λ 也是A的最小多项式的根. (2010年湘潭大学)

57. 设复矩阵的若当标准型为

$$J=\begin{pmatrix} 3 & & & & \\ 1 & 3 & & & \\ & 0 & 3 & & \\ & & 1 & 3 & \\ & & & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

证明A有三个线性无关的特征向量，但是没有更多的特征向量线性无关. (2010年湘潭大学)

58. 设A，B均为n阶矩阵，$AB=A+B$.证明：

（1）A，B的特征值均不为1，且$AB=BA$.

（2）若A，B均可对角化，则存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP$ 和$P^{-1}BP$ 同时为对角阵. (2011年湘潭大学)

59. 设B为n阶实矩阵，A为n阶实对称矩阵且A的所有特征值两两均不同.证明：A 与B 可交换当且仅当存在可逆矩阵S使得$S^{-1}AS$ 与$S^{-1}BS$ 同时为对角矩阵. (2012年湘潭大学)

60. 设A为n阶复方阵.若$A^2 = A$，则称A为幂零矩阵.证明：

（1）幂等矩阵A的特征值只有$\lambda_0 = 0$ 或$\lambda_1 = 1$.

（2）令V_{λ_0} 和V_{λ_1} 分别表示对应特征值$\lambda_0 = 0$ 和$\lambda_1 = 1$ 的特征子空间，则向量空间

$$\mathbb{C}^n = V_{\lambda_0} \bigoplus V_{\lambda_1}.$$

(2013年湘潭大学)

61. 令A与B为n阶实对称矩阵且$AB = BA$.证明：存在n阶正交矩阵Q使得$Q'AQ$ 与$Q'BQ$ 同时为对角阵.(2015年湘潭大学)

62. 令$A = (a_{ij})$ 为$n(n \geq 2)$ 阶方阵，λ 为A的任意特征值，证明：

（1）对于某正整数$1 \leq k \leq n$ 有：

$$|\lambda - a_{kk}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{kj}|.$$

（2）如果A满足：

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|,$$

则A是非奇异的，即$|A| \neq 0$.(2015年湘潭大学)

63. 令n阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & \cdots & a \\ a & 2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & 2 \end{pmatrix}.$$

（1）求A的所有特征值和特征向量.

（2）求可逆矩阵P使得$P^{-1}AP$ 为对角阵. (2015年湘潭大学)

64. 令A为n阶实对称矩阵，其特征值为$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$，其相应的标准正交特征向量为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$.记$V_i^j = L(\alpha_i, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_j)$ 为实数域上的生成子空间.证明：

$$\lambda_i = \max_{X \in V_i^j, X \neq 0} \frac{X'AX}{X'X}, \lambda_j = \min_{X \in V_i^j, X \neq 0} \frac{X'AX}{X'X}.$$

(2015年湘潭大学)

65. 令矩阵

$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

其中A为n阶矩阵，B为m阶矩阵.证明：C相似于对角阵当且仅当A与B都相似于对角阵. (2016年湘潭大学)

66. 令n阶复矩阵A的Jordan标准型为J，$J_m(\lambda)$ 为J中含有特征值λ，阶数为m的Jordan块.证明：

（1）如果$k \leq m$ 时，则

$$r(J_m(\lambda)-\lambda I_m)^{k-1}=r(J_m-\lambda I_m)^k+1,$$

其中I_m 表示为m阶单位矩阵.

（2）令Jordan标准型J中$J_m(\lambda)$ 的块数为s，则

$$s=r(A-\lambda I_n)^{m-1}-2r(A-\lambda I_n)^m+r(A-\lambda I_n)^{m+1}.$$

.(2016年湘潭大学)

67. 令λ 为n阶矩阵A的特征值，记

$$V_\lambda=\{x|AX=\lambda X\}.$$

证明：如果V_λ 的维数不小于k，则λ 为m阶顺序主子式A_m 的特征值，其中$m>n-k$.(2017年湘潭大学)

68. 设A是三阶实对称矩阵，A的特征值$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-2$，求$A^{2010}$.(2010年云南大学)

69. 设A是数域P上的n阶方阵，$V_1=\{X|(A-E)X=0,X\in P^n\},V_2=\{X|(A+E)X=0,X\in P^n\}$.证明：$P^n=V_1\bigoplus V_2$ 的充要条件是$A^2=E$，其中E为n阶单位矩阵.(2010年云南大学)

70. 设$\mathcal{A}$ 是线性空间V的线性变换，向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 是$\mathcal{A}$ 的分别属于不同特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 的相应特征向量，其中$1\leq k\leq n$.证明：如果W是$\mathcal{A}$ 的不变子空间，而且$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k\in W$，那么$dimW\geq k$.(2011年云南大学)

71. 设$\mathcal{A}$ 是n维线性空间的一个线性变换，如果$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k(1\leq k\leq n)$ 是A的不同的特征根，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$ 分别是A的属于$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 的特征向量.问：$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$ 是否线性相关？请证明你的结论. (2013年云南大学)

72. 设n次多项式$f(x)$ 是方阵A的最小多项式，证明：A可逆的充要条件是$f(0)\neq 0$.(2014年云南大学)

73. 设A是n阶实对称矩阵，证明存在幂等矩阵$B_i(i=1,\cdots,s)$ 使得$A=\lambda_1B_1+\lambda_2B_2+\cdots+\lambda_sB_s$. (2010年浙江大学)

74. 设复线性空间V有线性变换A，且A的特征多项式$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}$.证明：根子空间$\overline{V_{\lambda_i}}=ker(A-\lambda_i id)^{r_i}(i=1,2)$ 均为$A-$ 不变子空间. (2010年浙江大学)

75. 试证明满足$A^m=E_n$ 的n阶方阵A都相似于一个对角矩阵. (2011年浙江大学)

76. 已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&-4&2&2\\-2&0&1&3\\-2&-2&3&3\\-2&-6&3&7\end{pmatrix}.$$

求矩阵P，使得$P^{-1}AP$ 为若当标准型. (2011年浙江大学)

77. 设A是n阶幂等矩阵满足：

（1）$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_s$,

（2）$r(A) = r(A_1) + r(A_2) + \cdots + r(A_s)$.

证明所有的A_i 都相似于一个对角矩阵，A_i 的特征值之和等于A_i 的秩. (2012年浙江大学)

78. 方阵A的特征多项式为

$$f(\lambda) = (\lambda - 2)^3(\lambda + 3)^2.$$

请给出A所有可能的Jordan标准型. (2014年浙江大学)

79. 设g, h 为复数域上n维线性空间V的线性变换，$gh = hg$.求证g, h 有公共的特征向量.若不是在复数域上而是在实数域上，则结论是否成立？若成立，给出理由；不成立举出反例. (2014年浙江大学)

80. 设矩阵$A(t)$ 各元素连续可微，行列式恒为1，$A(0) = E$ ，求证：$A'(0)$ 的迹为0.（求导是对各元素独立求的）(2015年浙江大学)

81. $\lim\limits_{n \to \infty} A^n = 0 \Leftrightarrow$ A的所有特征值$|\lambda| < 1$.(2015年浙江大学)

82. 证明：酉矩阵的特征值模长为1. (2010年中科大)

83. 设n阶复方阵A的特征值全体为$\lambda_1, \cdots, \lambda_n, f(x)$ 是任意一个复系数多项式.求证：$f(A)$ 的特征值全体为$f(\lambda_1), \cdots, f(\lambda_n)$.(2011年中科大)

84. 设$n \geq 2$ ，求如下n阶实方阵$A = a(ij)_{n \times n}$ 的Jordan标准型:

$$A = \begin{pmatrix} O & & 1 & 1 \\ & \iddots & \iddots & \\ 1 & \iddots & & \\ 1 & & & O \end{pmatrix}.$$

(2012年中科大)

85. 设A, B 是n阶复方阵，$(C)^{n \times n}$ 上的线性变换$\mathcal{A} : X \to AX - XB$.求证：$\mathcal{A}$ 可逆的充要条件是A与B无公共的特征值. (2013年中科大)

86. 设方阵A的最小多项式$d_A(x) = x^3(x+1)^3$ ，求$B = A^2$ 的最小多项式$d_B(x)$. (2014年中科大)

87. 设A为$m \times n$ 矩阵，B为$n \times m$ 矩阵，a为非零复数.试证明：a为AB 的特征值当且仅当a为BA 的特征值.若$a = 0$ ，该结论还成立吗？请论证或者举例说明. (2016年中科大)

88. 考虑$[0, 1]$ 区间上的连续实函数全体组成的实线性空间V，设$n \geq 1$ ，W为$\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ 生成的子空间，考虑线性变换$\mathcal{A} = (x+1)\dfrac{d}{dx} : W \to W$.试证明$dimW = n$ ，且$\mathcal{A}$ 可对角化，并求出$\mathcal{A}$的所有特征向量. (2016年中科大)

89. 已知3阶正交阵A的行列式为1，求证：A的特征多项式一定为

$$f(\lambda) = \lambda^3 - a\lambda^2 + a\lambda - 1,$$

其中,$a \in \mathbb{R}$ 且$-1 \le a \le 3$.(2010年国科大)

90. 求证:任意n阶实方阵A的特征向量,也是其伴随矩阵A^* 的特征向量. (2010年国科大)

91. n阶实方阵A能表示成$A = H + K$,其中$H = \overline{H}^T, K = -\overline{K}^T$,矩阵$\overline{B}^T$ 表示矩阵B的共轭转置,设a, h, k 分别是A, H, K 中元素最大模,若$z = x + iy (x, y \in \mathbb{R})$ 是A的任意特征值,求证:$|z| \le na, |x| \le nh, |y| \le nk$. (2010年国科大)

92. 求证:Hermite矩阵的特征值都是实数. (2010年国科大)

93. 求证:反对称矩阵的非零特征值都是纯虚数. (2010年国科大)

94. 已知矩阵$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.
(1)求A的特征多项式,并确定其是否有重根.
(2)求一个正交矩阵P使得$PAPP^{-1}$ 为对角阵.
(3)令V是所有与A可交换的实矩阵全体,证明V是一个实数域上的线性空间,并确定V的维数. (2011年国科大)

95. 设A, B 是两个n阶复方阵,$n > 1$.
(1)如果$AB = BA$,证明A, B 有公共的特征向量.
(2)如果$AB - BA = \mu B$,其中μ 是一个非零复数,那么A, B 是否有公共的特征向量?若是请证明;若否请给出反例. (2011年国科大)

96. 设A是n阶实方阵,其特征多项式有如下分解

$$p(\lambda) = det(\lambda E - A) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{r_s},$$

其中E是n阶单位方阵,诸λ_i 两两不相等.试证明A的Jord标准型中以λ_i 为特征值的Jordan块的个数等于特征子空间V_{λ_i} 的维数. (2011年国科大)

97. 假设矩阵A与B没有公共的特征值,$f(x)$ 是矩阵A的特征多项式,证明以下结论:
(1)矩阵$f(B)$ 可逆.
(2)矩阵方程$AX = XB$ 只有零解. (2013年国科大)

98. 若A, B 无公共特征根,$f(\lambda)$ 为A的特征多项式.证明:
(1)$f(B)$ 可逆.
(2)$AX = XB$ 只有零解. (2015年国科大)

99. 设A是一个n阶复矩阵,定义$M_n(\mathbb{C})$ 上的线性变换$\mathcal{T}(X) := AX - XA$.若A的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ (不考虑重根).证明:$\mathcal{T}$ 的特征值必可以写成$\lambda_i - \lambda_j (1 \le i, j \le n)$ 的形式. (2016年国科大)

100. 实数域上所有$n(n \ge 2)$ 阶方阵构成的线性空间$V = \mathbb{R}^{n\times n}$ 上的线性变换$f : V \to V$ 定义为

$$f(A) = A + A', \forall A \in V,$$

其中A' 为A的转置.求f 的特征值,特征子空间,最小多项式. (2018年国科大)

101. 设$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,E为单位矩阵.记$p(A) = max|\lambda|$,(λ为A的特征值),证明:若$p(A) < 1$,则$E - A$ 可逆. (2010年中南大学)

102. 设$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.证明:

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n, x\ne 0} \frac{x'A'Ax}{x'x} = \lambda_1,$$

其中λ_1 为$A'A$ 的最大特征值. (2010年中南大学)

103. 设A为n阶实对称正交矩阵,且1为A的r重特征根.

(1)求A的相似对角矩阵.

(2)求$|3E - A|$. (2011年中南大学)

104. 设$m(\lambda)$ 是n阶方阵A的最小多项式,$f(\lambda)$ 是次数大于零的一个多项式.证明:$f(A)$ 可逆的充要条件是

$$(f(\lambda), m(\lambda)) = 1.$$

(2012年中南大学)

105. 设$\mathcal{A}$ 是数域P上的线性空间V上的线性变换,满足

$$\mathcal{A}^2 - 3\mathcal{A} + 2I = 0,$$

但$\mathcal{A} \ne I, 2I$ (I是单位变换).证明:1,2是$\mathcal{A}$ 的特征值,且V可分解为$\mathcal{A}$ 的属于1,2的特征子空间的直和. (2012年中南大学)

106. 设A为n阶实对称矩阵,B为n阶实对称正定矩阵.记$|\lambda B - A| = 0$ 的n个根为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.证明:

(1)$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 都是实数.

(2)存在$\mathcal{R}^n$ 的一组基$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 使得对一切$1 \le i, j \le n$ 有

$$Ax_i = \lambda_i Bx_i, x_i'Bx_j = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \ne j \end{cases}$$

(3)

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n, x\ne 0} \frac{x'Ax}{x'Bx} = \max_{1\le i\le n} \lambda_i, \min_{x\in\mathbb{R}^n, x\ne 0} \frac{x'Ax}{x'Bx} = \min_{1\le i\le n} \lambda_i.$$

(2013年中南大学)

107. 设A为3阶复矩阵,α_1, α_2 为A的分别属于-1,1的特征向量,而α_3 满足

$$A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3.$$

(1)证明$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

(2)证明A不可对角化,并求可逆矩阵P,使得$P^{-1}AP$ 为Jordan标准型. (2016年中南大学)

108. 设A为3阶正交矩阵,且$|A| = 1$.证明:

(1)A的每个特征值的模都是1.

(2)A的特征多项式为$\lambda^3 - a\lambda^2 + a\lambda - 1$,其中a为实数,且$-1 \le a \le 3$.(2016年中南大学)

109. 设A为n阶复方阵,λ 是A的特征值,设λ 的重数为s,A的Jordan标准型以λ 为对角元的Jordan块的个数为t,试讨论s与t的关系,并证明. (2018年中南大学)

110. 设A,B是n阶实矩阵.证明:A与B在$\mathbb{R}$ 上相似当且仅当A与B在$\mathbb{C}$ 上相似. (2011年中山大学)

111. 设n阶实矩阵A的主对角元全为0,其余元都为1.求A的特征值与特征向量. (2012年中山大学)

112. 设σ 是F上线性空间V上的线性变换.W是σ 的不变子空间.$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是σ 的两两不同的特征根,$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 分别是属于$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 的根向量.若$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m \in W$,证明:

$$\alpha_i \in W, i = 1, \cdots, m.$$

(2013年中山大学)

113. 设$A \in M_n(\mathbb{C})$.定义$M_n(\mathbb{C})$ 上的线性变换σ, τ 为$\sigma(X) = AX, \tau(X) = AX - XA$,对任意的$X \in M_n(\mathbb{C})$.

(1)设A的秩为r,求$dimker\sigma$;

(2)若$B \in M_n(\mathbb{C})$,满足$\tau(B) = B$.证明:B的特征值都是零,且矩阵A与B至少有一个公共的特征向量. (2015年中山大学)

114. 设线性映射$\varphi : M_n(F) \to M_k(F)$ 满足:$\forall A, B \in M_(F), \varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$ 及$\varphi(I_n) = I_k$.证明:若λ 是$\varphi(A)$ 的特征值,则λ 也是A的特征值. (2016年中山大学)

五.判断题

1. 非零线性变换A, 在某组基上的矩阵的对角线上元素均不为0, 则A必有非零的特征根. (   )(2011年北京大学)

(林秋林 林鹭 整理)