国内部分重点高校硕士研究生入学考试高等代数试题
(多项式部分)

一. 填空题

1. 两个多项式$f(x)=x^4-2x^3-4x^2+4x-3$, $g(x)=2x^3-5x^2-4x+3$的最大公因式$(f(x),g(x))=$________. (2009年北京交通大学)

2. 多项式$f(x)=3x^4+5x^3+x^2+5x-2$的有理根是________. (2009年北京交通大学)

3. 当$t=$______时, 多项式$f(x)=x^3-3x^2+tx-1$有重根. (2010年北京交通大学)

4. 多项式$f(x)=x^3-10x+5$的实根个数为______. (2010 年北京交通大学)

5. 设$f(x)=2x^2-3$, $g(x)=8x^4-6x^2+4x-7$,则$f^3(x)g(x)$的所有系数之和为________. (2011年北京交通大学)

6. 设多项式$f(x)$被$x-1, x-2, x-3$除所得余数依次为4, 8, 16, 则$f(x)$被$(x-1)(x-2)(x-3)$除所得的余式为________. (2011年北京交通大学)

7. 两个多项式$f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1$, $g(x)=x^3+x^2-2x-1$ 的最大公因式$(f(x),g(x))=$________. (2012年北京交通大学)

8. 多项式$f(x)=3x^3-6x^2+15x-14$的有理根为________. (2012年北京交通大学)

9. 多项式x^3+px+q有重根的条件是________. (2013年北京交通大学)

10. 两个多项式$f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1$, $g(x)=x^3+x^2-x-1$ 的最大公因式$(f(x),g(x))=$________. (2016年北京交通大学)

11. 设$f(x)=\begin{vmatrix} x+1 & x+10 & 111 & 7 \\ 0 & x+2 & 0 & 0 \\ 0 & 78 & x-7 & 6 \\ 0 & 99 & 10 & x+8 \end{vmatrix}$, 则$f(x)$中$x^3$的系数是________, 常数项等于________. (2013年北京科技大学)

12. $x^4+x^3+x^2+x+1$是否可约________. (2016 年北京科技大学)

13. 如果$(x-1)^2 \mid ax^4+bx^2+1$, 则$a=$______, $b=$______. (2015年大连理工大学)

14. 若$x-1$除多项式$f(x)$的余式是3, $x-2$除$f(x)$的余式是4, 则x^2-3x+2 的余式是________. (2012年湖南师范大学)

15. 若$(x-1)^3$除多项式$f(x)$的余式为x^2-3x+4, 则$x-1$除多项式$f(x)$ 的余式是________. (2013年湖南师范大学)

16. 若$x=r$是$f(x)$的5重根, 那么$x=r$是$[f^{'}(x)]^2+[f^{''}(x)]^3$的______重根. (2014 年湖南师范大学)

17. 多项式$30x^3-31x^2+10x-1$的全部有理根是________. (2016年湖南师范大学)

18. 设 n 级方阵 A 的最小多项式为 $f(x)$ 并且 $f(0)\neq 0$, 则矩阵 $\begin{pmatrix} A & -A & 0 \\ A & -A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}$ 的最小多项式为________.

19. 设 p 是素数, $f(x)=x^p+(p+1)x^2+p-1, g(x)=x^2+p$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式 $(f(x),g(x))=$ ________. (2011 年南京大学)

20. 设实系数多项式 $f(x)=x^3+px+q$ 有一个虚根 $4+3i$, 则 $f(x)$ 的其余两个根是________. (2011年南京大学)

21. 设 $f(x)=x^6-10x^5+6x^4-310x^3-580x^2-20x-1110$, 则 $f(12)=$ ________. (2011年南京大学)

22. 设 $f(x)=x^4-6x^2-tx-3$, 则当 $t=$______ 时, $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的最大公因式是二次多项式. (2011年南京大学)

23. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} x+1 & 32 & 54 & 108 \\ 0 & x-2 & 0 & 0 \\ 0 & 72 & x+3 & 4 \\ 0 & 98 & 5 & x+4 \end{vmatrix}$, 则 $f(x)$ 中 x^3 的系数为______. (2011年南京大学)

24. 多项式 $f(x)=2x^3-3x^2+1$ 的全部有理根为______. (2011 年南京大学)

25. 设 n 是正整数, 多项式 $x^{2n}-1$ 在实数域上的标准分解式是______. (2011年南京大学)

26. 设4级数字矩阵 A 的最小多项式为 $(\lambda+1)^3$, 则 A 的特征多项式为______. (2011年南京大学)

27. $f(x),g(x)$ 为 $\mathbb{F}$ 上多项式, 且在复数域上无公共根, 则 $f(x), f(x)+g(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 上的首项系数为1的最大公因式为______. (2009年上海大学)

28. 多项式 $f(x)=x^3-2x-4$ 的有理根是______. (2011年上海大学)

29. 四维线性空间 V 上线性变换 $\mathscr{A}$ 的最小多项式是 $x(x-1)$, 值域维数是 2, 则存在 V 上的一组基, 使得 $\mathscr{A}$ 在此组基下矩阵是对角阵 $A=$______. (2011 年上海大学)

30. 多项式 $f(x)=x^3-2x-4$ 与 $g(x)=x^3+x^2-2$ 的最大公因式是:_____. (2012年上海大学)

31. 使 $f(x)=x^3-3^2+tx-1$ 有三重根的 t 的值是:_____. (2014年上海大学)

32. 多项式 $f(x)=x^3-2x-4$ 的有理根是_____. (2015 年上海大学)

33. x^3+ax+1 在有理数域上有有理根, 求 $a=$ _____. (2016年上海大学)

二. 选择题

1. 设$f(x),g(x),h(x)\in P[x]$. 若$(f(x),g(x))=1$, $(f(x),h(x))=1$, 则下列叙述正确的有_____个. (2015年北京交通大学)

   (a) $(f(x),g(x)+h(x))=1$

   (b) $(f^2(x),g(x)h(x))=1$

   (c) $(f(x),(g(x),h(x)))=1$

   (d) $(f(x)g(x),h^2(x))=1$

   (A)1　　(B)2

   (C)3　　(D)4

2. 设A是4阶矩阵, 且A的行列式$|A|=0$, 则A中(　). (1989年)

   (A) 必有一列元素全为0

   (B) 必有两列元素对应成比例

   (C)必有列向量是其余列向量的线性组合

   (D)任一列向量是其余列向量的线性组合

3. 设 $f(x)$ 为有理系数多项式, 且没有有理根, 下列结论正确的有（　　）

   A. $f(x)$ 在有理系数域上不可约;

   B.如果 $f(x)$ 次数小于等于 3, 则 $f(x)$ 在有理系数域上不可约;

   C. $f(x)$ 在复数域上不可约;

   D.不能确定 $f(x)$ 在有理系数域上是否可约.

三.计算题

1. 求两个多项式$f(x)=2x^4-5x^3+6x^2-5x+2$, $g(x)=3x^3-8x^2+7x-2$ 的最大公因式. (2014年北京交通大学)

2. 设$a_i(1\le i\le n)$是n个非负整数, 试求多项式$\sum\limits_{i=1}^{n}x^{a_i}$被$x^2+x+1$整除的充要条件. (2009 年北京科技大学)

3. 求以三次方程$x^3+x+1=0$的三个根的平方为根的三次方程. (2011年北京科技大学)

4. 判断$f(x)=x^5-3x^4+5x^3-7x^2+6x-2$有无重因式, 若有, 请求出$f(x)$的所有重因式并指出其重数. (2012年北京科技大学)

5. 已知$f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1$, $g(x)=x^3+x^2-x-1$, 求$(f(x),g(x))=$. (2016年北京科技大学)

6. 数域$\mathbb{F}$上的多项式$f(x)$不可约, 证明: $f(x)$ 在复数域没有重根. (2014 年北京师范大学)

7. 已知$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$, $x=\frac{u}{v}$是$f(x)$ 的一个根, 证明: $u\mid a_0, v\mid a_n$. (2015年北京师范大学)

8. 设$f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$的三个根为$x_1,x_2,x_3$, 且$x_i\neq 0(i=1,2,3)$, 求以$\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3}$ 为根的多项式. (2016年北京师范大学)

9. 设多项式$f(x)=x^{2s+1}+x^{2t+1}+a$, 讨论$f(x)$的实根个数. 其中s,t均为正整数. (2009年大连理工大学)

10. a,b却何值时, $x-1$是多项式$f(x)=(x^2+ax+3)(x^2-b)$的重因式. (2013 年大连理工大学)

11. 求多项式x^3+px+q有重根的条件, 并求出重根及其重数. (2018年大连理工大学)

12. 已知多项式$f(x)$满足$f(3)=0,f(4)=1$. 求$f(x)$除以$(x-3)(x-4)$的余式. (2011 年湖南大学)

13. 设$f(x)=x^6-2x^5-5x^2+11x-2$. (1)试求$f(x)=0$的有理根; 、、(2)存在有理数域$\mathbb{Q}$上把$f(x)$分解成不可约多项式的乘积. (2015年湖南大学)

14. 构造一个次数最低的首系数为1的有理系数多项式, 使得$1+\sqrt{2},3-i$都是它的根. (2017年湖南大学)

15. 在实数域上分解因式: x^6+27. (2009年湖南师范大学)

16. 当a,b满足什么条件的时, 多项式$f(x)=x^3+3ax+2b$有重根? (2012 年湖南师范大学)

17. 设$f(x)=x^3+(a+1)x^2+4x+2b$, $g(x)=x^3+ax^2+2b$. 且$(f(x),g(x))$是一个二次多项式, 求a,b的值. (2013年湖南师范大学)

18. 设$a\neq 0$, 且$f(x)$满足$(x-a)\mid f(x^n)$, 证明: $(x^n-a^n)\mid f(x^n)$. (2013年湖南师范大学)

19. 设多项式$f(x)=6x^4-13x^3+13x^2-2$. (1)求出$f(x)$的全体有理根; (2) 在复数域上将$f(x)$分解为不可约多项式的乘积. (2014年湖南师范大学)

20. 设x_1,x_2,x_3分别是多项式$f(x)=x^3+5x^2-2x-7$的根, 令$s_k=x_1^k+x_2^k+x_3^k,(k=1,2,3,4)$, 试求$s_1,s_2,s_3,s_4$. (2009年华东师范大学)

21. 求所有满足条件$(x-1)f(x+1)=(x+2)f(x)$的非零实系数多项式$f(x)$. (2011年华东师范大学)

22. 设多项式$f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1$, $g(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$, 求$f(x), g(x)$的首一最大公因式$(f(x), g(x)$ 以及多项式$u(x), v(x)$, 使得$(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$. (2013年华东师范大学)

23. 求次数最低的多项式$f(x)$, 使得$f(1) = 1, f(-1) = 1, f(2) = 2, f(-2) = -8$. (2013 年华东师范大学)

24. 设多项式$f(x) = x^5 + 2x^4 - 7x^3 - 8x - 2$, $g(x) = 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x + 3$, 求$(f(x), g(x)$ 以及多项式$u(x), v(x)$, 使得$(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$. (2015年华南理工大学)

25. 求多项式 $f(x) = x^3 + 1$ 与 $g(x) = x^4 + 3x + 2$ 的首一最大公因式 $d(x)$,并求多项式 $u(x)$ 与多项式 $v(x)$ 使得 $f(x)u(x) + g(x)v(x) = d(x)$. (2015年华中师范大学)

26. 求多项式
$$f(x) = x^{2016} + x^{2015} + x^{2014}$$
除以多项式 $g(x) = (x-1)^2(x+1)$ 的余式. (2016年华中师范大学)

27. 求 t 值使 $f(x) = x^3 + tx^2 + 3x + 1$ 有重根, 并求出重根及其重数. (2010 年南京大学)

28. 写出多项式 $f(x) = x^4 + 1$ 在复数域、实数域及有理数域上的标准分解式, 并说明理由. (2011年南京大学)

29. (15 分) 设整系数多项式$f(x) = x^4 + ax^2 + bx - 3$, 记$(f(x), g(x))$ 为$f(x)$ 和$g(x)$ 的首项系数为1 的最大公因式，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数. 若 $\frac{f(x)}{(f(x), f'(x))}$ 为二次多项式, 求 $a^2 + b^2$ 的值. (2010年南京师范大学)

30. 设 V 是由数域 F 上 x 的次数小于 n 的全体多项式, 再添上零多项式构成的线性空间, 定义 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$, 使 $\mathscr{A}(f(x)) = xf'(x) - f(x)$, 其中 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数.
(1) 求 $\mathscr{A}$ 的核 $\mathscr{A}^{-1}(0)$ 与值域 $\mathscr{A}V$;
(2) 证明线性空间 V 是 $\mathscr{A}^{-1}(0)$ 与 $\mathscr{A}V$ 的直和. (2010年南京师范大学)

31. 求一个次数最低的实系数多项式, 使其被 $x^2 + 1$ 除余式为 $x + 1$, 被 $x^3 + x^2 + 1$ 除余式为 $x^2 - 1$. (2014年南京师范大学)

32. (15 分) 已知多项式$f(x) = x^3 + 2x^2 - 2$, $g(x) = x^2 + x - 1$, α, β, γ 为$f(x)$ 的根, 求一个数系数多项式$h(x)$ 使其以 $g(\alpha), g(\beta), g(\gamma)$ 为根. (2015年南京师范大学)

33. (15 分) 设$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 是否存在3 阶复矩阵$X$, 以及多项式$f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x]$ 使得 $A = f(X), B = g(X)$? 并说明理由. 其中 $f(x), g(x)$ 均是多项式. (2019 年南开大学)

34. 求多项式 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 14$ 的全部复根. (2010年上海交通大学)

35. 判断多项式 $x^4+3x^3+6x^2+6x+4$ 在 $\mathbb{Q}$ 上是否可约, 并说明理由. (2011年上海交通大学)

36. 用初等对称多项式表示出 n 元对称多项式 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$. (2011年上海交通大学)

37. 设 $F_n[x]$ 是数域 F 上次数 $<n$ 的全体多项式构成的线性空间. $F_n[x]$ 上线性变换 D 将每个多项式 $f(x)$ 映到其导数 $f'(x)$.

(1) 求 D 的特征多项式和最小多项式;

(2) 找出 $F_n[x]$ 的一组基, 使 D 在这组基下的矩阵是若当标准形;

(3) 设 I 是 $F_n[x]$ 上的单位变换, $A=I+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{D^k}{k!}$. 求证 A 是 $F_n[x]$ 上的可逆变换,并求出 A 的逆. (2015年上海交通大学)

38. 设 $f(x), g(x)$ 是实系数多项式, 且

$$\left(x^2+2\right) f(x)-\left(x^3+1\right) g(x)=1$$

求:

(1) 求 $f(x), g(x)$ 的最大公因式 $(f(x), g(x))$.

(2) $f(x), g(x)$ 都是非零的, 而且对于任意实系数多项式 $h(x)$ 都存在实系数多项式 $p(x), q(x)$ 使得

$$h(x)=p(x)f(x)+q(x)g(x).$$

39.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 求 A 的特征多项式;

(2) 求 A 的特征根及重数;

(3) 若 $f(x)=\left(x^2-1\right)(x+1)(x-5)+2$, 计算 A 的多项式 $f(A)$. (2011年首都师范大学)

40. 求出次数最低的首项系数为1的实系数多项式 $f(x)$ 使得 $f(0)=7, f(1)=14, f(2)=35, f(3)=76$. (2013年首都师范大学)

41. 求一个3次多项式 $f(x)$, 使得 $f(x)$ 除以 x^2+1 的余式是 $3x+4$, 除以 x^2+x+1 的余式是 $3x+5$. (2014年首都师范大学)

42. 设矩阵

$$T=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

而多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$$

求 $f(T)$. (2016年首都师范大学)

43. 求有理系数一次多项式 $f(x),g(x)$, 使得

$$x+1=\left(x^2+x+1\right)f(x)+\left(x^2-x+1\right)g(x).$$

(2017年首都师范大学)

44. 叙述代数基本定理. (2013年四川大学)

45. 写出实数域上的所有不可约多项式，并说明理由. (2013年四川大学)

46. 设W是数域F上的n元三次齐次多项式和零多项式组成的线性空间.求$dimW$ 并写出它的一组基. (2016年四川大学)

47. 设F是数域，$F[x]$ 是F上的一元多项式组成的集合，n是正整数.设$a\in F$ ，记

$$V=\{f(x)\in F[x]|\partial(f(x))\leq n,f(a)=0\}\bigcup\{0\}.$$

求$dimV$ 并写出它的一组基，这里，$\partial(f(x))$ 表示多项式$f(x)$ 的次数. (2016年四川大学)

48. 讨论多项式

$$f(x)=x^4+1$$

在实数域，复数域，有理数域上的因式分解. (2011年湘潭大学)

49. 设多项式

$$f(x)=6x^4+3bx^3+4ax^2-10x-1$$

与

$$g(x)=2x^4+5x^3+ax^2-bx+2,$$

其中a，b为整数.试讨论a，b为何值时，$f(x)$ 与$g(x)$ 有公共有理根，并求出相应的有理根. (2012年湘潭大学)

50. 令两组数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 与$b_1,b_2,\cdots,b_n$ ，如果$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 两两不同，则存在多项式

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$$

使得$p(\lambda_i)=b_i,i=1,2,\cdots,n$.(2014年湘潭大学)

51. 令两个n阶矩阵A与B，且A有n个互不相同的特征值，如果$AB=BA$ ，则存在次数最多为$n-1$ 次的多项式$p(x)$ 使得$p(A)=B$.(2014年湘潭大学)

52. 如果$(f(x),g(x))=1$，求$(f(x)g(x),f(x)+g(x))$.(2011年云南大学)

53. 判断多项式x^6+6x^3-6x-2 在有理数域上是否可约. (2012年云南大学)

54. 设多项式$f(x)=x^n+a^n(n>1,a\neq 0)$ 满足$x+a|f(x)$.求n满足的条件. (2013年云南大学)

55. 设复系数多项式$f(x)$ 没有重因式，如果$f'(x)|f(x)$，则$f(x)$ 有n重根，其中$n=\partial(f(x))$.(2015年云南大学)

56. 求$f(x)$ 除以$ax-b$ 的余式. (2016年云南大学) item 已知$(x-1)^2|(ax^4+bx^2+1)$，求a,b .(2016年云南大学)

57. 设多项式$f_1(x),\cdots,f_k(x)$ 的最大公因式等于1，$A\in P^{n\times n},X\in P^{n\times 1}$.求证：如果对于$1\leq i\leq k$，总成立$f_i(A)X=0$，则$X=0$.(2010年浙江大学)

58. 解下列方程组：

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=6\\x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=10\\x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3=18\\x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=34\end{cases}$$

(2011年浙江大学)

59. 设k是整数，α 是$x^4+4kx+1=0$ 的一个根，问

$$\mathbb{Q}[\alpha]:=\{a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+a_3\alpha^3|a_i\in\mathbb{Q}\}$$

是否为数域？如果是，请给予证明.如果不是，请说明理由. (2016年浙江大学)

60. 在$P[x]$ 中，已知多项式

$$f_1(x)=x-1,f_2(x)=x^2-1,f_3(x)=x^3-1,g_1(x)=x^2-x,g_2(x)=x^3-x^2.$$

记$f_1(x),f_2(x),f_3(x)$ 张成的空间为$V_1,g_1(x),g_2(x)$ 张成的空间为V_2，求V_1+V_2 以及$V_1\cap V_2$ 的基和维数. (2017年浙江大学)

61. 求满足$f(-1)=0,f(1)=4,f(2)=3,f3)=16$ 的次数最小的多项式$f(x)$.(2012年中科大)

62. 证明:多项式$f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$ 没有重根. (2012年国科大)

63. 证明:若实系数多项式$f(x)$ 对所有的实数x均有$f(x)\geq 0$,则$f(x)$ 可以写成两个实系数多项式的平方和$|g(x)|^2+|h(x)|^2$. (2017年国科大)

64. 设$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)'$ 为一个n维$(n\geq 1)$ 非零实向量,$f(x)=|xE_n-aa'|,g(x)=x^k-b^k$,其中E_n为n阶单位矩阵,k为一个正整数,$b=a'a$,求$(f(x),g(x))$. (2012年中南大学)

65. 设多项式

$$f(x)=2x^4+(2t+1)x^3+(t+1)x^2+4(1+u)x+2u+3$$

与

$$g(x)=x^3+tx^2+2u$$

至少有两个公共根,求t和u的值. (2016年中南大学)

66. 写出以$x_1^3x_2$ 为首项的项数最少的3元齐次对称多项式$f(x_1,x_2,x_3)$,并表示为基本对称多项式的多项式. (2018年中南大学)

67. 设$f(x)=x^3,g(x)=(1-x)^2$.

(1)求$u(x),v(x)$ 使得

$$(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x).$$

(2)设$r_1(x)=x+2,r_2(x)=1$.求一多项式$h(x)$ 使下列同余方程成立:

$$h(x)\equiv r_1(x)(modf(x)),h(x)\equiv r_2(x)(modg(x)).$$

(2013年中山大学)

四.证明题

1. 设多项式$f(x)$的所有复根都是实数, 证明: 如果a是$f(x)$的导数$f'(x)$ 的重根, 则a也是$f(x)$的重根. (2009 年北京大学)

2. 整系数多项式$f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k(n\geq 2010)$. 若存在素数$p$满足:

   (a) $p\nmid a_n$;

   (b) $p\mid a_i(i=0,1,2,\cdots,2008)$;

   (c) $p^2\nmid a_0$

   证明$f(x)$必有次数不低于2009的不可约整系数因式. (2010年北京大学)

3. 已知$\alpha=2013+2013^{\frac{1}{106}}$是有理多项式的一个根. 证明$\beta=2013+2013^{\frac{1}{106}}e^{\frac{2\pi i}{53}}$ 也是其中一个复根. (2013年北京大学)

4. (1)试证明: 给一个K上的多项式$f(x)$, 一定能找到一个不超过$(k+1)$次的多项式$S_f(x)$, 使得对每个正整数n, 都有$S_f(n)=\sum\limits_{j=0}^{n-1}f(j)$.
   (2)构造一个多项式$g(x)$满足对每个正整数n都有$g(n)=0^2+1^2+\cdots+(n-1)^2$. (2018年北京大学)

5. 设$t_1,t_2,\cdots,t_{n+1}$是区间$[0,1]$中$n+1$个不同的点, 函数$\varphi(t)$满足$\varphi(t_1),\varphi(t_2),\cdots,\varphi(t_{n+1})$ 不全为零, 问是否可以找到唯一的一个n次多项式$f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_nt^n$使得$f(t_i)=\varphi(t_i)(i=1,2,\cdots,n+1)$. (2009年北京交通大学)

6. 设$a_1, a_2, \cdots, a_n$是互异整数, 求证: $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$在有理数域上不可约. (2017年北京大学)

7. 若整系数多项式$p(x)$与$f(x)$有一个公共根, 且$p(x)$为不可约多项式, 那么$p(x) \mid f(x)$. (2010年北京科技大学)

8. 设$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$是一个整系数多项式, 证明: 如果$a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0$是奇数, 则$f(x)$既不能被$(x-1)$整除, 也不能被$(x-1)$整除. (2014年北京科技大学)

9. $f(x)$是$\mathbb{Z}$上的不可约多项式, 证明: $f(x)$在$\mathbb{C}$ 上无重因式. (2019年北京师范大学)

10. 实系数多项式$f(x)=x^4-6x^3+ax^2+bx+2$有4个实根, 证明: 至少有一个根小于1. (2009年大连理工大学)

11. 证明: $f^{'}(x) \mid f(x)$的充要条件是$f(x)$可以表示成$f(x)=k(x-a)^n$. (2009年大连理工大学)

12. 设$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0(a_0\neq 0)$是数域$P$ 上的n次多项式.
(1)若$f(x)$有n个根$x_1, x_2, \cdots, x_n$, 求以$\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \cdots, \frac{1}{x_n}$为根的$n$次多项式.
(2)若$f(x)$可约, 证明: 多项式$g(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 在P上也可约. (2011年大连理工大学)

13. 证明: 多项式$f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1$在有理数域上不可约. (2018年大连理工大学)

14. 设$d(x)$为$f(x)$和$g(x)$的公因式, 证明: (1)$d(x)$为$f(x)$和$g(x)$的一个最大公因式的充要条件是$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$;
(2)若$h(x)$是任一首项为1的多项式, 则$(f(x)h(x), g(x)h(x))=(f(x), g(x))h(x)$. (2009 年湖南大学)

15. 设$f(x)=1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+\frac{1}{(2k)!}x^{2k}(k\geq 1)$. 证明$f(x)$不存在三重根. (2010年湖南大学)

16. 设$f(x), g(x), h(x), k(x)$是数域P上的多项式, 且有

$$(x^2+1)h(x)+(x+1)f(x)+(x+2)g(x)=0 \ (x^2+1)k(x)+(x-1)f(x)+(x-2)g(x)=0$$

证明: (x^2+1)是$f(x)$和$g(x)$的公因式. (2012年湖南大学)

17. 设$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$是一个整系数多项式, 如果存在一个素数$p$, 使得:
(1)p不整除a_n;
(2)p整除$a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$;
(3)p^2不整除a_0.
证明: 多项式$f(x)$在有理数域上不可约. (2013年湖南大学)

18. 证明: $f(x)=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m}$ 没有二重根. (2014年湖南大学)

19. 设a,b,c,d均为有理数, $\sqrt{d}$是无理数, 且$b\neq 0$, 若$a+b\sqrt{d}$ 是有理系数多项式$f(x)$的根, 证明: $a-b\sqrt{d}$也是$f(x)$ 的根. (2017年湖南大学)

20. 证明: $(x^m,(1+x)^n)=1$, 其中m,n为任意正整数. (2009年湖南师范大学)

21. 设$f(x)$为一整系数多项式, 若$f(x)-1$有5个不同整数根, 证明: $f(x)-12$无整数根. (2009年湖南师范大学)

22. 设正整数m与n一奇一偶, 证明: $(x^m+1,x^n+1)=1$. (2010年湖南师范大学)

23. 设$\mathbb{F}[x]$表示域$\mathbb{F}$上的全体多项式集合, c是$\mathbb{F}[x]$ 中的某一个非零多项式的根, 令

$$I=f(x)\in\mathbb{F}[x]|f(c)=0.$$

证明:

(1)在I中存在这样的多项式$p(x)$, 使得I中每个多项式$f(x)$ 都有$p(x)\mid f(x)$;

(2)$p(x)$是$\mathbb{F}[x]$中不可约多项式. (2010年湖南师范大学)

24. 证明: 设m, n是正整数. 证明: $(x^m-1,x^n-1)=x-1$当且仅当$(m,n)=1$. (2012年湖南师范大学)

25. 若$f(x)$有重因式, 且$(f^{'}(x),f^{''}(x))=1$. 证明: $f(x)$的重因式都是2 的重因式. (2014年湖南师范大学)

26. 设正整数$m,n,a\neq 0$, 且m与n互素, n是偶数, 求证: $(x^m-a^m,x^n+a^n)=1$. (2015年湖南师范大学)

27. 设多项式$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)+1$, 其中$a_1<a_2<a_3<a_4$都是整数. 证明: $f(x)$ 在有理数域上可约$\Leftrightarrow a_4-a_1=3$. (2009年华东师范大学)

28. 设n是正整数. 证明: x^n+n在有理数域上可约的充要条件是存在正整数m, 使得$n=4m^4$. (2010年华东师范大学)

29. 证明: 三次方程$x^3-a_1x^2+a_2x-a_3=0$的三个根成等差数列的充要条件是$2a_1-9a_1a_2+27a_3=0$. (2011年华东师范大学)

30. 证明: 复数域上的方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_n=0\\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=0\\ \cdots\cdots\\ x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n=0\end{cases}$$

只有零解. (2015年华东师范大学)

31. 设K是数域,

(1)证明: 一元多项式x^2+x^3不能写成另一多项式的平方.

(2)证明: 二元多项式$y^2-x^2-x^3$是二元多项式环$K[x,y]$中的不可约多项式, 也就是说它不能写成两个非零多项式的乘积. (2017 年华东师范大学)

32. 设$f(x),g(x)$是$P[x]$中的非零多项式, 且$g(x)=s^m(x)g_1(x)$, 这里$m\geq 1$, $(s(x),g_1(x))=1$, $s(x)\mid f(x)$. 证明: 不存在$f_1(x)$, $r(x)\in\mathbb{P}[x]$, 且$r(x)\neq 0$, $\partial(r(x))<\partial(s(x))$ 使得$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{r(x)}{s^m(x)}+\frac{f_1(x)}{s^{m-1}(x)g_1(x)}$. (2009年华南理工大学)

33. 设m,n为自然数, 证明: $(x^m-1,x^n-1)=x^{(m,n)}-1$. (2010年华南理工大学)

34. 设x_0是数域P上的多项式$u(x)=f(x)g^{'}(x)-f^{'}(x)g(x)$的$k$ 重根, 记$v(x)=f(x_0)g(x)-f(x)g(x_0)$为非零多项式. 试证: x_0 为数域P上多项式$v(x)$的$k+1$重根. 反之亦然. (2011年华南理工大学)

35. 设$f(x),g(x)\in P[x]$, $f(x)\neq 0$, 证明下列条件等:

(1)$f(x)\mid g(x)$;

(2)$\forall k\in N$使得$f^k(x)\mid g^k(x)$;

(3)存在自然数m使得$f^m(x)\mid g^m(x)$. (2012年华南理工大学)

36. 设P是一个数域, $f(x),g(x)\in P[x]$, 且$\partial(g(x))\geq 1$. 证明: 存在唯一的多项式序列$f_0(x),f_1(x),\cdots,f_r(x)$, 使得对$0\leq i\leq r$有$\partial(f_i(x))<\partial(g(x))$或者$f_i(x)=0$, 且$f(x)=f_0(x)+f_1(x)g(x)+f_2(x)g^2(x)+\cdots+f_r(x)g^r(x)$. (2013 年华南理工大学)

37. 设P是一个数域, $f(x),g(x)\in P[x]$, 证明: $f(x)$与$g(x)$互素的充分必要条件是$f(x^n)$与$g(x^n)$互素, 这里n是任意给定的自然数. (2014年华南理工大学)

38. 设$f(x)$和$g(x)$都是数域P上的次数不小于1的多项式. 证明: $(f(x),g(x))=1$当且仅当存在唯一的多项式$u(x),v(x)\in P[x]$使得$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$, 这里$\partial(u(x))<\partial(g(x))$且$\partial(v(x))<\partial(f(x))$. (2016年华南理工大学)

39. 设$f(x)$和$g(x)$都是数域P上的多项式, $\partial(g(x))=m$, $\partial(h(x))=n$, 且$(g(x),h(x))=1$, 又设$f(x)$是P上的任一个次数$<n+m$的多项式. 证明: 存在$r(x),s(x)\in P[x]$使得$f(x)=r(x)g(x)+s(x)h(x)$, 其中$r(x)=0$ 或者$\partial(r(x))<n$, $\partial(r(x))<m$,. (2017年华南理工大学)

40. 设$f(x),g(x)\in P[x], d(x)=(f(x),g(x))$, 且$partial(\frac{f(x)}{d(x)})\geq 1$,$partial(\frac{g(x)}{d(x)})\geq 1$, 则存在唯一的$u(x),v(x)\in P[x]$, 使得$u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$. 其中$\partial(u(x))<partial(\frac{g(x)}{d(x)})$,$\partial(v(x))<partial(\frac{f(x)}{d(x)})$. (2019年华南理工大学)

41. 已知$\sqrt{2}-\sqrt{3}$是首项系数为1且不可约的有理多项式$f(x)$ 的根, 求$f(x)$且证明$f(x)$不可约. (2020年同济大学)

42. 已知$F(x)=x^n-1$, 试证:

(1)$F(x)$没有重根;

(2)已知$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$是$F(x)$的根($\omega_i\neq 1, i=1,2,\cdots,n$), 证明:

$$(1-\omega_1)(1-\omega_2)\cdots(1-\omega_n)=n. \text{ (2020年同济大学)}$$

43. 设 $f(x)$ 是正的多项式, 即对任意的 x 有 $f(x)>0$, 又设 A 是实对称阵, 证明:

(1) $f(A)$ 是正定的;

(2) A^2+I 可逆.(2011年华中科技大学)

44. 设 $A\in M_n(K), f_1(x), f_2(x)\in K[x]$, 记 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$. 证明: 如果

$$(f_1(x),f_1(x))=1,$$

那么 $f(A)Z=0$ 的任一解可以唯一的表示成 $f_1(A)Z=0$ 的一个解与 $f_2(A)Z=0$ 的一个解的和.(2016年华中科技大学)

45. 设 $f(x)$ 是 n 次实系数多项式, $n>1$. 设 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数多项式. 证明:

(1) 如果 r 是 $f(x)$ 的 m 重根, $m>0$, 则 r 是 $f'(x)$ 的 $m-1$ 重根 (若 r 是$f(x)$ 的零重根则表示r 不是 $f'(x)$ 的根) .

(2) 如果 $f(x)$ 的根都是实数, 则 $f'(x)$ 的根也都是实数.(2009 年华中师范大学)

46. 设 $\mathbb{F}$ 是任意数域, $p(x)\in\mathbb{F}[x]$. 证明: $p(x)$ 是不可约多项式当且仅当 $p(x)$ 是素多项式.(2010年华中师范大学)

47. 设多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素, 并设 $f^2(x)+g^2(x)$ 有重根, 令 $f'(x),g'(x)$ 分别表示 $f(x),g(x)$ 的导数多项式. 证明: $f^2(x)+g^2(x)$ 的重根是 $f'^2(x)+g'^2(x)$ 的根.(2010年华中师范大学)

48. 设 $\mathbb{F}$ 是任意数域, $\mathbb{F}[x]$ 表示数域 $\mathbb{F}$ 上的所有 $\mathbb{F}-$ 多项式的集合, 设 $f(x)\in\mathbb{F}[x]$. 证明: $f(x)$ 是一个不可约多项式的幂当且仅当对任意互素的多项式 $g(x),h(x)\in\mathbb{F}[x]$, 只要 $f(x)|g(x)h(x)$, 则或者 $f(x)|g(x)$ 或者 $f(x)|h(x)$. (2012年华中师范大学)

49. 设 $\mathbb{F}$ 是一个数域, $f(x),g(x)\in\mathbb{F}[x]$. 证明: $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素当且仅当 $f\left(x^2\right)$ 与 $g\left(x^2\right)$ 互素. (2013年华中师范大学)

50. 设 $\mathbb{R}$ 为实数域, 证明: 实数系多项式环 $\mathbb{R}[x]$ 中的不可约多项式的次数为 1 或者 2.

51. (1) 证明: x^2-2 作为有理数域上的多项式是不可约的.

(2) 把实数域 $\mathbb{R}$ 看成是有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的向量空间, 证明实数域上的 2 个数 $\sqrt{2},\sqrt{3}$ 在有理数域上是线性无关的. (2017年华中师范大学)

52. 证明以下问题.

(1) 设 $a_1,\cdots,a_n$ 是互不相同的整数. 证明: $f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2+1$ 在有理数域上不可约.

(2) 证明数域 F 上的 $n(n>0)$ 次多项式 $f(x)$ 能被它的微商 $f'(x)$ 整除的充要条件是 $f(x)=a(x-b)^n$, 其中 $a,b\in F$. (2009年兰州大学)

53. 证明以下问题.

(1) 设 $f(x),g(x)$ 都是多项式, 且 $F(x)=\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}$ 和 $G(x)=\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}$ 的次数都大于零. 证明：存在唯一的多项式 $u(x),v(x)$ 使:

$$u(x)F(x)+v(x)G(x)=(f(x),g(x))$$

并且 $\partial(u(x))<\partial(G(x)),\partial(v(x))<\partial(F(x))$.

(2) 设 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$, 其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个两两不等的整数. 证明: $f(x)$ 在有理数域上不可约. (2010年兰州大学)

54. 证明以下问题.

(1)设 $p(x)$ 是数域 P 上的次数大于零的多项式. 证明: $p(x)$ 是一个不可约多项式的充分必要条件是对任意 $f(x),g(x)\in P[x]$, 由 $p(x)|f(x)g(x)$ 一定推出 $p(x)|f(x)$ 或 $p(x)|g(x)$.

(2) 设 n 是大于等于2的正整数. 证明: 麵系数多项式 x^n+2 不能分解为两个次数小于 n 的整系数多项式的乘积. (2011年兰州大学)

55. 证明以下问题.

(1)设 $f(x)$ 是次数大于零的首项系数为1的多项式. 证明: $f(x)$ 是一个不可约多项式的方幂的充分必要条件为: 对任意多项式 $g(x),h(x)$, 由 $f(x)|g(x)h(x)$ 可以推出 $f(x)|g(x)$, 或者对某一正整数 $m,f(x)|h^m(x)$.

(2) (10 分) 设$f(x),g(x)$ 是数域P 上的两个多项式. 证明: $g^2(x)|f^2(x)$ 当且仅当$g(x)|f(x)$. (2012年兰州大学)

56. 设 α 是数域 P 上一个正次数多项式的一个复根. 令

$$I=\{f(x)\in P[x]|f(\alpha)=0\}$$

证明:

(1) I 中存在正次数首1多项式 $p(x)$ 使得对任意 $f(x)\in I$, 有 $p(x)|f(x)$, 进而有 $I=p(x)P[x]$;

(2) $p(x)$ 是不可约多项式;

(3) 进一步, 若 $p(-\alpha)=0=p(\alpha)$, 则对任意复数 $\beta,p(\beta)=0$ 当且仅当 $p(-\beta)=0$. (2013年兰州大学)

57. 证明以下问题.

(1) (10 分) 设 $f(x), g(x)$ 为复数域上两个首项系数为1的互异3次多项式. 且

$$x^4+x^2+1|f\left(x^3\right)+x^4 g\left(x^3\right).$$

证明 $(f(x), g(x))=(x+1)(x-1)$.

(2) (13 分) 设 $f(x)$ 是一个实系数多项式. 证明: $f(x)$ 根全是实根的充要条件是 $f^2(x)$ 不能表示成两个次数不同的实系数多项式的平方和. (2014年兰州大学)

58. 证明以下问题.

(1) （10 分) 设 P 是一个数域, m 是任一正整数. 证明: 如果在 $P[x]$ 中, $x-a|f\left(x^m\right)$, 那么 $x^m-a^m|f\left(x^m\right)$.

(2)（10 分）证明: 有理系数多项式 $f(x)$ 在有理数域上不可约的充分必要条件是, 对任意有理数 $a \neq 0$ 和 b , 多项式 $g(x)=f(ax+b)$ 在有理数域上不可约. (2015年兰州大学)

59. 证明以下问题.

(1) (10 分) 设 $f_1(x)=af(x)+bg(x)$, $g_1(x)=cf(x)+dg(x)$, 且 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. 证明:

$$(f(x), g(x))=\left(f_1(x), g_1(x)\right)$$

(2) (12 分) 设 $a_1, \cdots, a_n$ 为互不相同的整数, $g(x)=\left(x-a_1\right) \cdots\left(x-a_n\right)-1$. 证明: $g(x)$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约. (2016年兰州大学)

60. 设 V 是数域 P 上的有限维线性空间, σ 是 V 上的一个线性变换. 若在 $P[x]$ 中 $f(x)=f_1(x) f_2(x)$ 且 $\left(f_1(x), f_2(x)\right)=1$, 则

$$(f(\sigma))^{-1}(0)=\left(f_1(\sigma)\right)^{-1}(0) \oplus\left(f_2(\sigma)\right)^{-1}(0).$$

(2016年兰州大学)

61. 证明以下问题.

(1) (12 分) 设 $f(x), g(x)$ 是数域 P 上的两个不全为零的多项式. 证明集合

$$M=\{u(x) f(x)+v(x) g(x) | u(x), v(x) \in P[x]\}$$

中存在次数最小的首项系数为1 的多项式 $d(x)$, 并且 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式.

(2) (8 分) 设 $m \geqslant 2$, $p_1, p_2, \cdots, p_r$ 是两两不同的素数. 证明: $\sqrt[m]{p_1 p_2 \cdots p_r}$ 不是有理数. (2017年兰州大学)

62. 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间, σ 是 V 上的线性变换, $f(x), g(x) \in P[x],(f(x), g(x))=1, h(x)=f(x) g(x)$. 记线性变换 $h(\sigma), f(\sigma)$ 和 $g(\sigma)$ 的核为 $\operatorname{ker} h(\sigma), \operatorname{ker} f(\sigma)$ 和 $\operatorname{ker} g(\sigma)$. 证明:

$$\operatorname{ker} h(\sigma)=\operatorname{ker} f(\sigma) \oplus \operatorname{ker} g(\sigma).$$

(2017年兰州大学)

63. 证明: 次数大于0且首项系数为1 的多项式 f 是一个不可约多项式的方幂的充分必要条件是对任意的多项式 $g(x), h(x)$, 由 $f(x)|g(x)h(x)$ 推出 $f(x)|g(x)$, 或存在某一正整数 m 使得 $f(x)|h^m(x)$.

(2) (12 分)已知 $f(x)$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的 n 次不可约多项式,且非零复数 α 满足 $f(\alpha)=f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0$, 证明: $f(x)$ 的每个根的倒数仍旧是 $f(x)$ 的根. (2018年兰州大学)

64. 已知

$$\partial\left(\frac{f(x)}{(f(x), g(x))}\right)>0, \partial\left(\frac{g(x)}{(f(x), g(x))}\right)>0.$$

证明: 存在 $u(x), v(x)$, 使得

$$u(x) f(x)+v(x) g(x)=(f(x), g(x))$$

其中 $\partial(u(x))<\partial\left(\frac{g(x)}{(f(x), g(x))}\right), \partial(v(x))<\partial\left(\frac{f(x)}{(f(x), g(x))}\right)$

2. 设 $f(x)=(x-1)(x-2) \cdots(x-(2 n-1))+1, n$ 为非负整数, 证明: $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上不可约. (2019年兰州大学)

65. (15 分) 设m, n 为正整数, $d=(m, n)(m, n$ 的最大公因式$), a$ 是非零复数. 证明:

$$\left(x^m+a^m, x^n+a^n\right)=\begin{cases}x^d+a^d, & \text{当} \frac{m}{d}, \frac{n}{d} \text{ 都为奇数,} \\ 1, & \text{当} \frac{m}{d} \text{ 或} \frac{n}{d} \text{ 为偶数.}\end{cases}$$

其中 $\left(x^m+a^m, x^n+a^n\right)$ 表示多项式 x^m+a^m 与 x^n+a^n 的最大公因式. (2011年南京大学)

66. 设整数 $n \geqslant 2$, 并且 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是互不相同的整数. 证明: 多项式

$$f(x)=\left(x-a_1\right)\left(x-a_2\right) \cdots\left(x-a_n\right)+1$$

在有理数域上不可约。(2014年南京大学)

67. (20 分) $f(x)=x^3+a x^2+b x+c$ 是整系数多项式, 若a, c 是奇数，b 是偶数, 证明: $f(x)$ 是有理数域上的不可约多项式. (2009年南京师范大学)

68. 设复数 $c \neq 0$ 为某个非零有理系数多项式的根, 记 $M=\{f(x) | f(x)$ 为有理系数多项式, $f(c)=0\}$.

(1) 证明: M 中存在唯一的首项系数为1的有理数域上的不可约多项式 $p(x)$, 使得对任意的 $f(x) \in M$ 都有 $p(x)|f(x)$ 成立;

(2) 证明: 存在有理数域上的多项式 $g(x)$, 使得 $g(c)=\frac{1}{c}$;

(3) 令 $c=\sqrt{3}+\mathrm{i}$, 求(1)中的 $p(x)$. (2010年南京师范大学)

69. 设 $f_1(x), f_2(x)$ 是数域 P 上的两个多项式, 满足 $\left(x^2+x+1\right) | f_1\left(x^3\right)+x f_2\left(x^3\right)$. 证明:

$$(x-1) |\left(f_1(x), f_2(x)\right).$$

(2011年南京师范大学)

70. (15 分) 设对任意非负整数n, 令$f_n(x)=x^{n+2}-(x+1)^{2n+1}$. 设多项式$g(x)=f_1(x)f_2(x)\cdots f_{2012}(x)$, 证明:

$$\big(x^2+x+1,g(x)\big)=1.$$

(2012年南京师范大学)

71. 设 $f(x)$ 为有理数域上的非零多项式, 如果 $f(\sqrt{3})=0$, 证明: 在有理数域上 x^3-2 整除 $f(x)$. (2013年南京师范大学)

72. 证明高斯Gauss引理: 两个本原多项式的乘积还是本原多项式. (2016年南京师范大学)

73. 设数域 P 上的 $n(n\geqslant 2)$ 次多项式 $f(x)$ 没有单因式, 证明:

$$f''(x)|f(x)\ \text{当且仅当}f(x)=c(x-a)^n$$

其中 $f''(x)$ 表示二阶导数, a,c 是数域 P 中的常数. (2016年南京师范大学)

74. (20 分)设多项式

$$f(x)=x^{3m}-x^{3n+1}+x^{3p+2},g(x)=x^2-x+1$$

其中 m,n,p 为非负整数, 证明 $g(x)|f(x)\Leftrightarrow m,n,p$ 有相同的奇偶性. (2017年南京师范大学)

75. 已知 p 为奇素数, 求证: 多项式 $f(x)=(p-1)x^{p-2}+(p-2)x^{p-3}+\cdots+2x+1$ 在有理数域不可约. (2018 年南京师范大学)

76. 设 $f(x)$ 是 n 级矩阵 A 的特征多项式. 存在互素且次数分别为 p,q 的多项式 $g(x),h(x)$, 满足 $f(x)=g(x)h(x)$ 求证: $\quad r(g(A))=q,\quad r(h(A))=p$. (2014年南开大学)

77. 设 $f(x),g(x)$ 为数域 P 上两个互素的一元多项式，A 是数域 P 上的 n 级矩阵, 证明 $f(A)g(A)X=0$ 的解空间是 $f(A)X=0$ 与 $g(A)X=0$ 两个解空间的直和. (2017年南开大学)

78. 已知

$$\begin{gathered}f(x)=x^3+x^2+x+1\\ g(x)=x^{4n}+x^{4m+1}+x^{4k+2}+x^{4l+3}\end{gathered}$$

$(n,m,k,l$为正整数$)$, 证明: $f(x)$ 整除$g(x)$. (2009年上海大学)

79. 叙述并证明Eisenstein判别法. (2010年上海大学)

80. (10 分) 设

$$\begin{gathered}f(x)=\sum_{t=0}^{n}a_tx^t\\ g(x)=\sum_{t=0}^{n}a_{n-t}x^t\in\mathbb{F}[x]\end{gathered}$$

求证 $f(x)$ 不可约当且仅当 $g(x)$ 不可约. 利用此结论说明 $2x^n+2x^{n-1}+\cdots+2x+1$ 在有理数域上不可约. (2011 年上海大学)

81. 试证: 如果已知既约分数 $\frac{p}{q}$ 是整系数多项式 $f(x)$ 的根, 则 $(q-p)|f(1),(q+p)|f(-1)$, 且对任意整数 m, 有

$$(mq-p)|f(m).$$

(2012年上海大学)

82. 设 $f(x)$ 为数域 $\mathbb{F}$ 上不可约多项式, 如果 $\alpha\in\mathbb{C}$ 是 $f(x)$ 的根, 则

$$F(\alpha)=\{g(\alpha)|g(x)\in\mathbb{F}(x)\}$$

是数域, 且 $F(\alpha)$ 作为数域 $\mathbb{F}$ 上线性空间的维数是 $f(x)$ 的次数. (2012年上海大学)

83. 证明多项式 $f(x)=x^5-5x+1$ 在有理数域上不可约. (2014年上海大学)

84. 设

$$f(x)=x^3+x^2+x+1$$
$$g(x)=x^{8n}+x^{8m+2}+x^{4k+1}+x^{12l+3}$$

$(n,m,k,l$ 为正整数), 求证: $f(x)|g(x)$. (2015年上海大学)

85. 证明存在多项式 $f(x)$ 满足

$$(x-1)^n|(f(x)+1),(x+1)^n|(f(x)-1).$$

(2010年上海交通大学)

86. 设 $f(x),g(x),h(x)$ 为实系数多项式, $h(x)$ 首项系数为 1, 求证:

$$(f(x)h(x),g(x)h(x))=(f(x),g(x))h(x)$$

(2013年上海交通大学)

87. (10 分) 设$R[x]$ 为次数小于等于2 的实系数多项式全体, 令$f_1=1,f_2=x-1,f_3=(x-2)(x-1)$ 试证 f_1,f_2,f_3 是 $R[x]$ 的一组基. (2014年上海交通大学)

88. (15 分) 假设$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2-x & 2-x^2 & 2x^3-1 \\ 2x^2-1 & 3x^3-1 & 4x^3-1 \end{vmatrix}$

(1) 证明: 存在实数 $c(0<c<1)$, 使得 $f'(c)=0$. 这里 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数;

(2) 在 $Q[x]$ 中将 $f(x)$ 分解为不可约因式之积. (2015年上海交通大学)

89. (20 分) 令数域K 上的多项式$f(x)=g(x)h(x)$, 其中$(g(x),h(x))=1$. 设A 是数域K 上的n 阶矩阵, W_f,W_g,W_h 分别表示齐次线性方程组 $f(A)X=0,g(A)X=0,h(A)X=0$ 的解空间, 则 W_g,W_h 是 W_f 的子空间, 且 $W_f=W_g\oplus W_h$. (2016年上海交通大学)

90. 令一多项式为 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$. 则它能被数 $(x-1)^{n+1}$ 整除的充分必要条件是

$$\begin{cases} a_1+2a_2+\cdots+na_n=0 \\ a_1+4a_2+\cdots+n^2a_n=0 \\ \vdots \\ a_1+2^na_2+\cdots+n^na_n=0 \end{cases}$$

(2016年上海交通大学)

91. 设 $P[x]_n$ 是次数 $\leq n$ 的多项式集合, 如果 $\partial(f(x))=n$, 则 $f(x),f'(x),\cdots,f^n(x)$ 是 $P[x]_n$ 的基. 如果 $f(x)=(x\neg a)^n$, 则对任意复数域上多项式 $g(x)=\sum\limits_{i=1} a_ix^i\in P[x]_n$, 试求在对应基上的坐标. (2016年上海交通大学)

92. 证明

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

在有理数域上不可约. (2018年上海交通大学)

93. $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素,

$$f(M)g(M)X=0,\quad f(M)X=0,\quad g(M)X=0$$

的解空间分别是 W,W_1,W_2, 证明: $W=W_1\oplus W_2$. (2018年上海交通大学)

94. 已知 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)+t$. 其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是两两互不相同的整数.

1. 证明: 当 $t=-1$ 时，$f(x)$ 在有理数域上不可约.
2. 当 $t\neq-1$ 时, 试讨论 $f(x)$ 在有理数域上是否可约? 并说明理由. (2019 年上海交通大学)

95. 设 $f(x),g(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 为有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的两个多项式, m 为一个正整数, 证明: $f(x)^m|g(x)^m$ 当且仅当

$$f(x)|g(x).$$

(2009年首都师范大学)

96. 设 $f(x),g(x)$ 为有理系数非零多项式, 其中 $f(x)$ 是不可约的(即不能分解为两个较低有理系数多项式的积). 假设存在复数 α 使得 $f(\alpha)=g(\alpha)=0$, 证明:

$$f(x)|g(x).$$

(2012年首都师范大学)

97. 设 A 为 n 阶实方阵, $f(x)$ 为实系数多项式, 证明 $f(A)$ 为可逆阵当且仅当

$$\operatorname{ged}(f(x),\chi_A(x))=1$$

(其中 $\chi_A(x)$ 为A 的特征多项式.) (2014年首都师范大学)

98. 设 $f(x), g(x)$ 为两个互素的多项式, 次数分别为 $m, n > 0$. 证明: 存在唯一的次数小于 n 的多项式 $u(x)$ 及唯一的次数小于 m 的多项式 $v(x)$, 使得

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$$

(2015年首都师范大学)

99. 设 $a_1, \cdots, a_n$ 为 n 个不同的数, 证明对任意 n 个数 $b_1, \cdots, b_n$, 存在唯一次数小于 $n-1$ 的多项式 $f(x) = c_1 + c_2x + \cdots + c_nx^{n-1}$, 使得

$$f(a_i) = b_i (1 \le i \le n)$$

(2015年首都师范大学)

100. 对于一个 $n \times n$ 多项式矩阵

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

定义其导数为

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{11}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{n1}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

证明对于任意两个 $n \times n$ 多项式矩阵 $A(t), B(t)$, 有乘积导数公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A(t)B(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A(t))B(t) + A(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B(t).$$

(2016年首都师范大学)

101. 设 n 阶复方阵 A 有 n 个不同特征值, n 阶复方阵 B 满足 $AB = BA$, 证明存在多项式 $f(x)$, 使得

$$B = f(A).$$

(2017年首都师范大学)

102. 设$f(x) = |xE_n - A|$是A的特征多项式，设$f'(x)$ 为$f(x)$ 的导数且$f'(x)|f(x)$. 证明：A是数量矩阵.(2010年四川大学)

103. 设$P(A)$ 是满足$f(A) = 0$ 的F上的所有多项式$f(x)$ 组成的集合.证明：$P(A)$ 是F上的无穷维线性空间.并且，如果$g(x) \in P(A)$ 的次数大于n，那么$g(x)$ 在F上是可约的.(2010年四川大学)

104. 设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是A的全部复特征值，证明：对任意非负整数k，数$s_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^k$ 属于F.(2010年四川大学)

105. 设F，K都是数域且$F\subseteq K$.设F上的n次多项式$f(x)$ 在K上有n个根$x_1,x_2,\cdots,x_n$.证明：$\prod\limits_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)^2\in F$.(2011年四川大学)

106. 设$f(x)=x_{p-1}+x_{p-2}+\cdots+x+1$ ，p是素数.

（1）证明：$f(x)$ 在有理数域$\mathbb{Q}$ 上不可约.

（2）令$\mathcal{M}=\{A\in M_n(\mathbb{C})|f(A)=0\}$ ，其中$M_n(\mathbb{C})$ 是全体n阶复矩阵组成的集合.把$\mathcal{M}$ 中的矩阵按相似关系分类，则$\mathcal{M}$ 中的全部矩阵可以分成几类？说明理由.(2011年四川大学)

107. 设$f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$ 是数域F上的n次多项式，$n>0$.

（1）设$c\in F$.证明：存在唯一的$b_i\in F$ 使得$f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}b_i(x-c)^i$ ，并写出b_i 的表达式.

（2）设$f(x)$ 在F上不可约，α 是$f(x)$ 的一个复根.证明：集合$K=\{g(\alpha)|g(x)\text{是F上的多项式}\}$ 是一个数域，且$f(x)$ 在K上可约.

（3）设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是$f(x)$ 的全部复根.证明：存在F上的n次多项式$h(x)$ ，其全部复根为$\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j^k,k=1,2,\cdots,n$.(2012年四川大学)

108. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是数域F上的多项式$f(x)$ 的全部复根.证明：如果存在$i\neq j$ 使得$\alpha_i=\alpha_j$ ，那么$f(x)$ 在F上是可约的. (2013年四川大学)

109. 设A是数域F上的n阶方阵，$V=\{f(A)|f(x)\in F[x]\}$.证明：$dimV=1$ 当且仅当A是数量矩阵. (2013年四川大学)

110. 设F是数域，$a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}\in F$ 互不相同.证明如下的结论：对任意$b_1,b_2,\cdots,b_{n+1}\in F$ ，存在唯一的F上的次数不超过n的多项式$f(x)$ 使得$f(a_i)=b_i,1\le i\le n+1$.(2014年四川大学)

111. 设A是数域F上的n阶方阵，其全部复特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.设$g(x)$ 是F上的多项式，满足$g(\lambda_i)\neq 0,1\le i\le n$.证明：$g(A)$ 可逆，且存在F上的次数小于n的多项式$h(x)$ 使得$(g(A))^{-1}=h(A)$.(2014年四川大学)

112. 设$u(x),v(x)$ 分别是n，m次整系数多项式$(n>m\ge 1)$ ，且$v(x)$ 的首项系数为1.证明：存在唯一的整系数多项式$q(x),r(x)$ 使得$u(x)=q(x)v(x)+r(x)$ ，其中，$r(x)=0$ 或$r(x)$ 的次数小于m .(2014年四川大学)

113. 证明如下的定理（Eisenstein判别法）：设$f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$ 是正次数的整系数多项式，如果存在满足如下条件的素数p：

$(1)p\nmid a_n$;

$(2)p\mid a_i(0\le i\le n-1)$;

$(3)p^2\nmid a_0$,

则$f(x)$ 在有理数域上不可约. (2016年四川大学)

114. 设p是素数，证明：对任意正整数$n \geq 2$，多项式$x^n - px + p$ 的全部n个复根互不相同. (2016年四川大学)

115. 设$f_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} x^i, n \geq 1$ 是整数.解答下列各题.

（1）设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 是$f_n(x)$ 的全部复根($n \geq 2$)，k是正整数.求$\sum\limits_{j=0}^{n-1} \alpha_j^{nk}$ 的值.

（2）给出$f_n(x)|f_m(x)$ 的一个充分必要条件，并证明你的结论.

（3）设A是数域F上p阶方阵且存在q使得$f_q(A) = 0$.证明：A在复数域上可对角化，即存在可逆的复方阵B使得$B^{-1}AB = 0$ 为对角阵.

（4）设C是r阶方阵，其$(i,j)-$ 元为：$\int_0^1 f_i(x)f_j(x)dx$.问C是否是正定阵，说明理由. (2017年四川大学)

116. 设$f(x)$ 是首项系数为1的三次实系数多项式，$f'(x)$ 表示$f(x)$ 的导数，$(f(x), f'(x))$ 表示$f(x)$ 和$f'(x)$ 的首项系数为1的最大公因式.

（1）证明：如果$f(x)$ 有重根，那么$f(x)$ 的根都是实根.

（2）设$\frac{f(x)}{(f(x), f'(x))} = (x-1)(x-2)$.写出所有以$f(x)$ 为特征多项式的Jordan阵.

（3）设α 是$f(x)$ 的所有复根，令$V = \{y|y = g(\alpha), g(x)\text{是实系数多项式}\}$.证明V是实数域上的线性空间，并求出它的维数$dimV$.

（4）设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是$f(x)$ 的一个复根，设$s_k = \alpha_1^k + \alpha_2^k + \alpha_3^k$.设$s_1 = s_2 = 0, s_3 = 1$，求$f(x)$ 的表达式.

（5）设$f(x)$ 的全部根都在单位圆上，证明：多项式$g(x) = 2xf'(x) - 3f(x)$ 的全部复根也都在单位圆上. (2018年四川大学)

117. 设$f(x)$ 是数域P上的一个多项式，$a, b \in P, a \neq 0$.

（1）证明$f(x)$ 在P上可约的充要条件是$f(ax+b)$ 在P上可约.

（2）举例说明当$f(x)$ 不可约时，$f(x^2)$ 可以可约. (2010年湘潭大学)

118. 设p是一个素数，多项式

$$f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1.$$

证明：$f(x)$ 在有理数域上是不可约的. (2013年湘潭大学)

119. 设正整数$m > 1$，多项式

$$f(x) = x^5 + mx + 1.$$

证明：$f(x)$ 在有理数域上是不可约的. (2014年湘潭大学)

120. 令A为n阶复矩阵，证明：

（1）A的最小多项式$g(x)$ 整除A的特征多项式$f(x)$.

（2）如果A可逆，则存在次数不超过$n-1$ 的多项式$p(x)$ 使得$A^{-1} = p(A)$.(2016年湘潭大学)

121. 令$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与$y_1,y_2,\cdots,y_n$ 为$2n$ 个数，其中$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 互不相同.证明：存在次数不超过$n-1$ 次的多项式$p(x)$ 使得

$$p(x_i)=y_i,i=1,2,\cdots,n.$$

(2017年湘潭大学)

122. 设$f(x)$ 是一个整系数多项式，证明：如果$f(0)$ 与$f(1)$ 都是奇数，那么$f(x)$ 不能有整数根. (2011年云南大学)

123. 设不可约多项式$p(x)$ 是$f(x)$ 的k重因式（其中自然数$k\geq 2$），证明：$p(x)$ 是其微商$f'(x)$ 的$k-1$ 重因式. (2012年云南大学)

124. 设$A=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}$，有理系数多项式$f(x)$ 满足$f(A)=0$ 的充要条件是$x^2-5x+3|f(x)$.(2016云南大学)

125. 设$f(x),g(x)$ 为整系数多项式，证明$(f(x),g(x))=1$ 的充要条件是$(f(x^m),g(x^m))=1$.(2017年云南大学)

126. 设$f(x)$ 是复系数一元多项式，对任意整数n有$f(n)$ 还是整数，证明$f(x)$ 的系数都是有理数，举例说明存在不是整系数的多项式满足对任意整数n有$f(n)$ 还是整数. (2010年浙江大学)

127. 如果$(x^2+x+1)|(f_1(x^3)+xf_2(x^3))$，且n阶方阵A有一个特征值等于1，证明$f_1(A),f_2(A)$ 都不是可逆矩阵. (2011年浙江大学)

128. 设$f(x)$ 是一个多项式，$g(x)$ 是A的最小多项式，证明：$f(A)$ 可逆的充要条件是

$$(f(x),g(x))=1.$$

(2015年浙江大学)

129. 设$P[x]$ 是数域P上的一元多项式全体，$f_1(x),\cdots,f_n(x)$ 和$g_1(x),\cdots,g_m(x)$ 是$P[x]$ 中的两组多项式，且它们生成的子空间相同，证明：

（1）$P[x]$ 不是该数域P上的有限维子空间.

（2）$f_1(x),\cdots,f_n(x)$ 的最大公因式等于$g_1(x),\cdots,g_m(x)$ 的最大公因式. (2016年浙江大学)

130. 设$\mathbb{R}[x]_{n+1}$ 是次数小于等于n的实系数多项式全体，$f(x)$ 是n次多项式.证明：对$\mathbb{R}[x]_{n+1}$ 中的任意多项式$g(x)$，总存在常数$c_0,c_1,\cdots,c_n$ 使得

$$g(x)=c_0f(x)+c_1f'(x)+\cdots+c_nf^{(n)}(x),$$

其中$f^{(k)}(x)$ 是$f(x)$ 的k阶导数. (2016年浙江大学)

131. 已知$f(x)$ 是整系数多项式，且$f(0),f(1)$ 都是奇数，证明$f(x)$ 没有整数根. (2017年浙江大学)

132. 设$\dfrac{p}{q}$ 是既约分数,$f(x)=a_nx_n+a_{n-1}x_{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是整系数多项式,而且$f(\dfrac{p}{q})=0$.证明

(1)$p|a_0$,而$q|a_n$.

(2)对任意正整数m,有$(p-mq)|f(m)$.(2011年国科大)

133. 设多项式$g(x)=p^k(x)g_1(x)(k\geq 1)$,多项式$p(x)$ 与$g_1(x)$ 互素.证明:对任意的多项式$f(x)$ 有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{r(x)}{p^k(x)}+\frac{f_1(x)}{p^{k-1}g_1(x)},$$

其中$r(x),f_1(x)$ 都是多项式,$r(x)=0$ 或$deg(r(x))<deg(p(x))$.(2012年国科大)

134. 多项式$f(x)=f_0(x^n)+xf_1(x^n)+\cdots+x^{n-1}f_{n-1}(x^n)$,且$x^n+x^n-1+\cdots+x+1|f(x)$,求证:$f_i(1)=0$. (2014年国科大)

135. 设$f(x),g(x)$ 分别是m,n 次多项式,证明:

(1)存在次数低于n的多项式$u(x)$ 与次数低于m的多项式$v(x)$,使得$u(x)f(x)+v(x)g(x)=res(f(x),g(x))$.

(2)$(f(x),g(x))=1$ 当且仅当$res(f(x),g(x))\neq 0$. (2014年国科大)

136. 设$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 互不相同,$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n),s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k$,证明

(1)$|f'(x)|^2-f(x)f''(x)$ 无实根.

(2)$x^{k+1}f'(x)=(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\cdots+s_{k-1}x+s_k)f(x)+g(x),g(x)$ 的次数小于n. (2015年国科大)

137. 设多项式$g(x)=p^k(x)g_1(x)(k\geq 1)$,多项式$p(x)$ 与$g_1(x)$ 互素.证明:对于任意多项式$f(x)$ 有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{r(x)}{p^k(x)}+\frac{f_1(x)}{p^{k-1}g_1(x)},$$

其中$r(x),f_1(x)$ 都是多项式,$r(x)=0$ 或$r(x)$ 的次数小于$p(x)$. (2016年国科大)

138. 设$p(x),q(x),r(x)$ 都是数域K上的正次数多项式,而且$p(x)$ 与$q(x)$ 互素,$deg(r(x))<deg(p(x))+deg(q(x))$.证明:存在数域K上的多项式$u(x),v(x)$ 满足$deg(u(x))<deg(p(x)),deg(v(x))<deg(q(x))$,使得$\dfrac{r(x)}{p(x)q(x)}=\dfrac{u(x)}{p(x)}+\dfrac{v(x)}{q(x)}$. (2018年国科大)

139. 设$f(x),g(x)$ 是整系数多项式,且$g(x)$ 是本原的.如果

$$f(x)=g(x)h(x),$$

其中$h(x)$ 是有理系数多项式,证明:$h(x)$ 一定是整系数多项式. (2010年中南大学)

140. 设$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是n个$(n\geq 2)$互不相同的整数.证明:

$$f(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_n)-1$$

不能表示成两个次数大于0的整系数多项式之积. (2013年中南大学)

141. 设

$$f(x) = x^4 - 10x^2 + 1.$$

(1)求$f(x)$ 在实数域上的标准分解式.

(2)证明:$f(x)$ 在有理数域上不可约.

(3)如果$g(x)$ 是一个以$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 为根的有理系数多项式,证明:$f(x)|g(x)$. (2014年中南大学)

142. 设P是一个数域,$p(x), f(x), g(x) \in P[x]$,且$p(x)$ 在P上不可约.证明:

(1)或者$(p(x), f(x)) = 1$,或者$p(x)|f(x)$.

(2)若$p(x)|f(x)g(x)$,则$p(x)|f(x)$ 或者$p(x)|g(x)$.(2015年中南大学)

143. 设$f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2, g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$,求它们的最大公因式. (2010年中山大学)

144. 设$a = (a_1, a_2, \cdots, a_n), b = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$,计算矩阵$A - a^T b$ 的行列式. (2012年中山大学)

145. 设$f(x), g(x)$ 是数域F上的多项式,且

$$u(x) = (x^2+1)f(x) + (x^2+x+1)g(x), v(x) = xf(x) + (x+1)g(x).$$

证明$(f(x), g(x)) = (u(x), v(x))$. (2018年中山大学)

五. 问答题

1. 设$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$是有理多项式$g(x)$ 在$\mathbb{C}$的全部根, 对任意的$f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, 问$\prod\limits_{i=1}^{n} f(\lambda_i)$ 是否一定为有理数? (2012年北京大学)

2. 设$f(x) = \prod\limits_{k=1}^{2013} (x-k)^2 + 2014$, 则$f(x)$在有理数域内是否可约? (2013年北京大学)

3. (1)叙述并证明艾森斯坦(Eisenstein)判别法.

   (2)举例说明在有理数域上存在任意次数的不可约多项式(给出理由).

   (3)设$n > 1$, 证明n个互不相同的素数的几何平均数一定为无理数. (2012年大连理工大学)

4. 若$f(x)$与$g(x)$的最大公因式为$d(x)$, 则$f(x^2)$与$g(x^2)$的最大公因式是否必为$d(x^2)$? (2011年湖南师范大学)