

国家精品课程厦门大学高等代数: gdjpkc.xmu.edu.cn

国家精品资源共享课高等代数: www.icourses.cn/sCourse/course_3077.html

中国大学MOOC:《高等代数(上)》www.icourse163.org/course/XMU-1001951004

中国大学MOOC:《高等代数(下)》www.icourse163.org/course/XMU-1002554004

国内部分重点高校硕士研究生入学考试高等代数试题 (线性映射部分)

一. 填空题

1. 设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 的线性变换, 对自然数 k , 如果向量 ξ 满足 $\mathcal{A}^{k-1}\xi \neq 0, \mathcal{A}^k\xi = 0$. 则 $\xi, \mathcal{A}\xi, \dots, \mathcal{A}^{k-1}\xi$ 线性_____关. (2009年北京工业大学)

2. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 定义了3维向量空间 R^3 (R 是实数域)的一个线性变换 $\mathcal{A}: \xi \rightarrow A\xi (\xi \in R^3)$. 其值域 $\mathcal{A}R^3$ 的维数是_____. (2009年北京工业大学)

3. 记 R^5 为5维列向量空间, A 是5阶实方阵. 若齐次线性方程组 $AX = 0$ 解空间的维数是2, 则线性变换 $\mathcal{A}: \alpha \rightarrow A\alpha (\alpha \in R^5)$ 像空间 $\mathcal{A}(R^5) = \{A\alpha | \alpha \in R^5\}$ 的维数是_____. (2011年北京工业大学)

4. 设 $\dim V = 4, \sigma \in L(V)$, σ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

则 σ 包含 ε_1 的最小不变子空间 $W =$ _____. (2016年北京交通大学)

5. 设 f 是数域 P 上的三维线性空间 V 上的一个线性函数, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是 V 的一组基, 且

$$f(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) = f(\varepsilon_1 - 2\varepsilon_3) = 0, f(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = 1$$

则 $f(x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3) =$ _____. (2015年大连理工大学)

6. 设线性空间 $\mathbb{R}^3$ 的线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}^3$ 的像 $\mathcal{A}\alpha$ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 $(-1, 2, 3)'$, 则 $\alpha =$ _____. (2015年湖南师范大学)

二. 选择题

1. 设 A 是 $m \times n$ 实矩阵 (自然数 $m, n > 1$). A' 定义了 n 维实数列向量空间 R^n 到自身的一个线性变换 $\mathcal{A} : \alpha \rightarrow (A' A)\alpha$. 若 A 的秩 $r(A) = k$, 则像空间 $W = \{\mathcal{A}(\alpha) | \alpha \in R^n\}$ 的维数 (). (2012年北京工业大学)

- (A) $\dim W = k$ (B) $\dim W = n - k$
(C) $\dim W = m - k$ (D) $\dim W = r(A' A)$

2. 设 V, U 分别是 n 维, m 维线性空间 ($m \neq n$), $\varphi : V \rightarrow U$ 的线性映射, 则 (). (2014年北京工业大学)

- (A) $\dim \ker \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi = n$ (B) $\dim \ker \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi = m$
(C) $\dim \ker \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi = |m - n|$ (D) $\dim \ker \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi = m + n$

3. 线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 则 $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_2$ 下的矩阵是 (). (2017年北京工业大学)

- (A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
(C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

4. 设 φ 是 V 上线性变换, $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ 是 V 上的一组基, 且由每个 ξ_i 生成的子空间 $L(\xi_i)$ 的是 φ 的不变子空间, 则 φ 在 $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ 下的表示矩阵 _____. (2015年北京交通大学)

- (A) 必可逆 (B) 必为对角阵
(C) 必为上三角阵, 但未必是对角矩阵 (D) 必为上三角阵, 但未必是对角矩阵

5. 在以下的变换 T 中, 有 _____ 个是线性变换. (2015年北京交通大学) (1) 设 $\alpha \neq 0$ 为线性空间 V 中某固定向量, $Tx = x + \alpha$ (对任意 $x \in V$);

- (2) 在线性空间 $P[x]$ 中, $Tf(x) = f(x+1)$ (对任意 $f(x) \in P[x]$);
(3) 设 A, B 为 n 阶固定方阵, $TX = AXB$ (对任意 $X \in P^{n \times n}$);
(4) 设 A 为 n 阶固定方阵, $TX = AX - XA$ (对任意 $X \in P^{n \times n}$)

- (A) 1 (B) 2
(C) 3 (D) 4

6. 下列所定义的变换, 有 _____ 个是线性变换. (2016年北京交通大学)

- (1) 在 P^3 中, $\sigma(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2 + x_3, x_3^2)$;
(2) 在 P^3 中, $\sigma(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_1)$;

(3)在 $P[x]$ 中, $\sigma f(x) = f(x+1)$;

(4)在 $P[x]$ 中, $\sigma f(x) = f(x_0)$, $x_0 \in P$, 是一固定的数.

(A)1

(B)2

(C)3

(D)4

7. 下列所定义的变换, _____不是线性变换. (2017年北京交通大学)

(A)在 $\mathbb{R}^2$ 中, $\sigma(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, x_2 - x_3, 2x_2 + 4x_3)$;

(B)在 $\mathbb{R}^2$ 中, $\sigma(a, b) = \begin{cases} (a, b), & \text{若 } ab \geq 0; \\ (a, -b), & \text{若 } ab < 0. \end{cases}$

(C)设 V 是定义在 $[a, b]$ 上所有连续函数组成的 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 在 V 中 $\sigma(f(x)) = \int_a^x f(t)dx$;

(D)设 V 是数域 F 上的1维线性空间, $\sigma(\alpha) = a\alpha$, 其中 a 是 F 中一固定数.

三.计算题

1. 设 V 是一个 n 维 K -线性空间, $(\alpha_j)_{j=1}^n$ 是它的一组基. 若对 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$.

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}(\alpha_1) \\ \mathcal{A}(\alpha_2) \\ \vdots \\ \mathcal{A}(\alpha_n) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

则记 $A = \mathcal{A}_f$. 若对任一个线性变换 $\mathcal{B}$, 都有 $(\mathcal{A}\mathcal{B})_f = \mathcal{A}_f\mathcal{B}_f$, 试确定 $\mathcal{A}$ 在基底 $(\alpha_j)_{j=1}^n$ 下的矩阵.

(2018年北京大学)

2. 设 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 是四维线性空间 V 的一组基, 线性变换 $\mathcal{A}$ 在此基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(1)求 $\mathcal{A}^{-1}(0)$ 的维数与一组基;

(2)求 $\mathcal{A}^V$ 的一组基). (2016年北京工业大学)

3. $V = \{\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i | a_i \in \mathbb{R}\}$, σ 为 V 中线性变换, 对任意的 $g(x) \in V$, 有 $\sigma(g(x)) = g(x) + g'(x)$.

(1)求 σ 在基 $\{1, x, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}, \dots, \frac{x^{n-12}}{(n-1)!}\}$ 下的矩阵.

(2)求 V 中所有 σ 的不变子空间的个数, 并证明你的结论. (2019年北京工业大学)

4. 设 $V = \{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0 | a_i \in \text{数域 } P\}$, $T \in L(V)$,

$$T: V \rightarrow V, T(f(x)) = xf'(x) - f(x)$$

(1)求 T 的核空间和像空间: $\ker T$ 及 $\operatorname{Im} T$;

(2)求证: $V = \ker T \oplus \operatorname{Im} T$. (2016年北京交通大学)

5. 设线性变换 $\mathcal{A}$ 在三维线性空间 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(1)求 $\mathcal{A}$ 在基 η_1, η_2, η_3 下的矩阵, 其中 $\begin{cases} \eta_1 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 \\ \eta_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 \\ \eta_3 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \end{cases}$;

(2)求 $\mathcal{A}$ 的值域 $\mathcal{A}(V)$ 和核 $\mathcal{A}^{-1}(0)$;

(3)把 $\mathcal{A}^{-1}(0)$ 的基扩充为 V 的基, 并求 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵. (2013年北京科技大学)

6. 已知

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

和

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}, \eta_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}, \eta_4 = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$$

是 $\mathbb{M}_2(P)$ 的两组基, $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{M}_2(P)$ 的线性变换, 定义为

$$\mathcal{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \alpha, \alpha \in \mathbb{M}_2(P).$$

(1)求由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 的过渡矩阵;

(2)求一个非零的 $\xi \in \mathbb{M}_2(P)$, 使它在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 和 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下有相同的坐标;

(3)求 $\mathcal{A}$ 的特征值;

(4)求 $\mathcal{A}$ 的特征子空间. (2014年北京科技大学)

7. 已知 σ 为对称变换, V 是一个线性空间, W 是 V 的一个子空间, 试证: W 是 σ 的不变子空间. (2009年北京师范大学)

8. V_1, V_2 为线性空间 V 的两个子空间, $\dim V_1 + \dim V_2 = n$, 证明: 存在 V 的线性变换 σ : $\operatorname{Ker} \sigma = V_1, \operatorname{Im} \sigma = V_2$. (2010年北京师范大学)

9. 设 σ 是域 F 上向量空间 V 的幂等变换, 即 σ 是满足条件 $\sigma^2 = \sigma$ 的线性变换.

(1)证明: $V = \operatorname{Im}(\sigma) \oplus \operatorname{Ker}(\sigma)$;

(2)证明: σ 可对角化. (2016年北京师范大学)

10. 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ 是线性空间 V 上的两两不同的线性变换, 求证: 存在 $\alpha \in V$, 使得 $\mathcal{A}\alpha, \mathcal{B}\alpha, \mathcal{C}\alpha$ 两两不同.
(2009年大连理工大学)

11. 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性变换, 且存在 $\alpha \in V$, 使得 $V = L(\alpha, \mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}^2\alpha, \dots)$, 其中 $L(\alpha, \mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}^2\alpha, \dots)$ 表示 $\alpha, \mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}^2\alpha, \dots$ 生成的 V 的子空间.

(1) 证明 $\alpha, \mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}^2\alpha, \dots, \mathcal{A}^{n-1}\alpha$ 是 V 的一组基底;

(2) 求 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵, 及 $\mathcal{A}$ 的特征多项式与最小多项式. (2011年大连理工大学)

12. 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 是线性空间 V 的一组基, 已知线性变换 T 在这组基下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(1) 求 T 在基 $\eta_1 = \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_4, \eta_2 = 3\varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \eta_3 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4, \eta_4 = 2\varepsilon_4$ 下的矩阵 B ;

(2) 求 T 的值域 TV 和核 $T^{-1}(0)$;

(3) 在 $T^{-1}(0)$ 选一组基, 将它扩充成 V 的一组基. (2015年湖南大学)

13. 在多项式线性空间 $V = P[x]_n$ 中, 规定线性变换 $\mathcal{A}$ 为

$$\mathcal{A}(f(x)) = xf'(x) - f(x), \forall f(x) \in V$$

试求出 $\mathcal{A}$ 的值域 $\mathcal{A}V$ 以及 $\mathcal{A}V$ 的一个基. (2010年湖南师范大学)

14. 已知线性空间 P^3 上的线性变换

$$\mathcal{A}(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$$

求 $\mathcal{A}$ 的值域 $\mathcal{A}P^3$ 与核 $\mathcal{A}^{-1}(0)$ 的基和维数. (2012年湖南师范大学)

15. 设 $\mathcal{T}$ 为实线性空间 $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 的线性变换, 已知

$$\mathcal{T}(1, 0, 0) = (1, 0, 1), \mathcal{T}(0, 1, 0) = (2, 1, 1), \mathcal{T}(0, 0, 1) = (-1, 1, -2).$$

(1) 试用矩阵 A 表示此变换 $\mathcal{T}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)A$;

(2) 求 $\mathcal{T}$ 的值域 $\mathcal{T}(\mathbb{R}^3)$ 的一个基;

(3) 求 $\mathcal{T}$ 的核 $\mathcal{T}^{-1}(0)$ 的一个基. (2014年湖南师范大学)

16. 设 V 是数域 K 上的4维线性空间, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是 V 的一组基. 若 $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性变换, 且在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下

的矩阵为准对角矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 试求所有的 $\mathcal{A}$ -不变子空间. (2014年华东师范大学)

17. 已知 $\mathbb{R}^3$ 的线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $\eta_1 = (-1, 1, 1), \eta_2 = (1, 0, -1), \eta_3 = (0, 1, 1)$ 下的矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1)求 $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1 = (1, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1)$ 下的矩阵;

(2)求 $\mathcal{A}$ 的值域和核. (2015年华南理工大学)

18. 设 $\mathbb{R}^2$ 的线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1 = (1, 2), \varepsilon_2 = (2, 1)$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

线性变换 $\mathcal{B}$ 在基 $\eta_1 = (1, 1), \eta_2 = (1, 2)$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(1)求 $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ 在基 η_1, η_2 下的矩阵;

(2)求 $\mathcal{A}\mathcal{B}$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 下的矩阵;

(3)设 $\alpha = (3, 3)$, 求 $\mathcal{A}\alpha$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 下的坐标;

(4)求 $\mathcal{B}\alpha$ 在基 η_1, η_2 下的坐标. (2016年华南理工大学)

19. $P[x]_4$ 是所有次数小于4的多项式和零多项式构成的线性空间, 求线性变换 $\mathcal{A}(f(x)) = x^2 f''(x) + f(x) + f'(x)$ 的特征值, 求最大特征值的特征向量.

20. 设 σ 是线性空间 $V = P^{n \times n}$ 的一个线性变换, 满足 $\sigma(A) = A'$, 其中 A' 为 A 的转置矩阵, 求 σ 的全部特征值及对应的特征向量. (2015年南京师范大学)

21. 设 V 为数域 P 上的有限维线性空间, $\mathcal{A}$ 为 V 上的线性变换, 且 $\mathcal{A}$ 满足

$$\mathcal{A}^4 + \mathcal{A}^3 - 3\mathcal{A}^2 - \mathcal{A} + 2\mathcal{E} = \mathcal{O}$$

其中 $\mathcal{E}$ 为恒等变换, 若存在一个非零向量 $\alpha \in V$ 使得 $\mathcal{A}^3(\alpha) + \mathcal{A}^2(\alpha) - \mathcal{A}(\alpha) = 3\alpha$, 试问是否存在 V 的一组基, 使得 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵为对角阵? 说明理由. (2007年南开大学)

22. 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

在 $P^{4 \times 1}$ 上定义线性变换 $\mathcal{A}$ 使 $\mathcal{A}X = AX, X \in P^{4 \times 1}$, 试求 $\mathcal{A}$ 的像 $\text{Im } \sigma$ 与 $\ker \sigma$ 的维数与一组基. (2009年南开大学)

23. 设 A 为数域 P 上的 n 级方阵, 且有 n 个互异的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 定义 $P^{n \times n}$ 上的线性变换 T 为 $T(X) = AX, X \in P^{n \times 1}$, 试求出 T 的所有特征值及其重数. (2012年南开大学)

24. (20 分) 3 阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

定义 $P^{3 \times 3} \rightarrow P^{3 \times 3}$ 的线性变换 $\sigma: \sigma(X) = AX$, 其中 $X \in P^{3 \times 3}$. 分别求 $\ker \sigma$ 与 $\text{Im } \sigma$ 的维数与一组基.

25. 设 $M_2(\mathbb{R})$ 表示实数域上全体二阶方阵构成的线性空间, 矩阵

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \eta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \eta_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

是 $M_2(\mathbb{R})$ 的一个基, 又设

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}, \xi_4 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

已知 σ 是 $M_2(\mathbb{R})$ 的一个线性变换, $\sigma(\eta_i) = \xi_i (i = 1, 2, 3, 4)$.

(1) 求 $\sigma(\xi_1), \sigma(\xi_2), \sigma(\xi_3), \sigma(\xi_4)$;

(2) 问 $\sigma(\xi_1), \sigma(\xi_2), \sigma(\xi_3), \sigma(\xi_4)$ 能否构成 $M_2(\mathbb{R})$ 的一个基? 请阐述理由. (2010年武汉大学)

26. 设 f 是平面 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换, 使得

(1) 点 $(1, 0)$ 的像位于第四象限;

(1) 点 $(0, 1)$ 的像位于第二象限;

(1) 点 $(1, 1)$ 的像位于第一象限.

证明: f 是可逆变换, 且 f^{-1} 把第一象限内的任意点都映射到第一象限. (2010年武汉大学)

27. 设 φ 是复数域上的线性变换, ε 为恒等变换, λ_0 为 φ 的一个特征值, λ_0 在 φ 的最小多项式中的重数 $m_0 = \min_k \{k \in \mathbb{N}^+ | \ker(\lambda_0 - \varphi)^k = \ker(\lambda_0 \varepsilon - \varphi)^{k+1}\}$. (2014年武汉大学)

28. 设 $\varepsilon_1 = (1, 0), \varepsilon_2 = (0, 1)$ 是实线性空间 $\mathbb{R}^2$ 中的单位向量, $\alpha_1 = (1, 3), \alpha_2 = (2, 2), \mathcal{A}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的线性变换, 使得

$$\mathcal{A}(\varepsilon_1) = \alpha_1, \mathcal{A}(\varepsilon_2) = \alpha_2.$$

(1) 求 $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 下的矩阵.

(2) 求 $\mathcal{A}$ 的逆变换 $\mathcal{A}^{-1}$ 在基 α_1, α_2 下的矩阵.

(3) 求 $\mathcal{A}$ 的特征值与特征向量.

(4) 求 $\mathcal{A}$ 的值域与核. (2010年湘潭大学)

29. 设 $\mathbb{R}^3$ 中线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 下的矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 求 $\mathcal{A}$ 在基 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 下的矩阵. (2010年云南大学)
30. 设微商 $\mathcal{D}(f(x)) = f'(x)$ 是线性空间 $P[x]_3$ 的一个线性变换 (其中 $f(x) \in P[x]_3$), 求 $\mathcal{D}$ 在基 $1, x, x^2$ 下的矩阵. (2011年云南大学)
31. 设 $\mathcal{A}$ 是 n 维线性空间 V 的线性变换, 求 $\mathcal{A}$ 的秩+ $\mathcal{A}$ 的零度. (2011年云南大学)
32. 令 T 是有限维线性空间 V 上的线性变换, 设 W 是 V 的 T -不变子空间. 那么, $T|_W$ 的最小多项式整除 T 的最小多项式. (2012年浙江大学)
33. 空间 V 上的线性变换 f , 可以找到子空间 U, W , 使得 f 在 U 上为可逆线性变换, 在 W 上为零线性变换, 且 $V = U \oplus W$. (2015年浙江大学)
34. 所有正交变换构成 G
- (1) G 关于线性变换的合成和逆变换封闭;
 - (2) G 为有限集还是无限集;
 - (3) G 是什么代数结构. (2015年浙江大学)
35. 设 V_1, V_2 是 n 维线性空间 V 的两个子空间, 且它们的维数之和等于 n . 证明: 存在 V 上的线性变换 T , 使得 T 的核和像分别等于 V_1, V_2 . (2016年浙江大学)
36. 设 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 上的线性变换 $\mathcal{A}X = AXA^T$, 其中 A 是 n 阶实方阵, $\text{rank}(A) = r$, 求 $\text{Im } \mathcal{A}$ 的维数及其一组基. (2014年中科大)
37. 设 P_3 是由次数不超过3的复系数多项式组成的线性空间. 考虑其上的线性变换

$$\mathcal{A} = x \frac{d}{dx} : P_3 \rightarrow P_3.$$

试求 $\mathcal{A}$ 的极小多项式. (2015年中科大)

四. 证明题

1. 同构空间的维数:

设域 F 上线性空间 W, U, V 他们分别是 r, s, t 维的. σ 为 W 到 U 上的线性映射, f 属于 $\text{Hom}(W, U)$ 证明:

- (1) $\dim \text{Hom}(W, U) = rs$;
- (2) 设 σ^* 为 $\text{Hom}(W, U)$ 到 $\text{Hom}(W, V)$ 上线性映射, 则存在单射 σ , 使 $\sigma^*(f)\omega = \sigma(f\omega)$, 其中 $\omega \in W$;
- (3) $\dim \text{Im } \sigma^* = \ker(i - \sigma^*) + \dim \sigma$. (2011年北京大学)

2. 设 V 是 n 维线性空间, $\mathcal{A}$ 为一线性变换且 $\mathcal{A}$ 的最小多项式次数为 n .
- (1) 证明存在向量 α 使得 $\alpha, \mathcal{A}\alpha, \dots, \mathcal{A}^{n-1}\alpha$ 是 V 的一组基;
 - (2) 任意与 $\mathcal{A}$ 可交换的线性变换可表为 $\mathcal{A}$ 的多项式. (2014年北京大学)
3. 设 V 是有限维线性空间, A, B 是 V 上线性变换满足下面条件:
- (1) $AB = O$, 这里 O 是0变换;
 - (2) A 的任意不变子空间也是 B 的不变子空间;
 - (3) $A^5 + A^4 + A^3 + A^2 + A = O$, 证明: $BA = O$. (2016年北京大学)
4. 设 V 是复数域上有限维线性空间, A 是 V 上的线性变换, A 在一组基下矩阵为 F .
- (1) 若 A 可对角化, 则对任意 A 的不变子空间 U , 存在 U 的一个补空间 W 是 A 的不变子空间.
 - (2) 若对任意 A 的不变子空间 U , 存在 U 的一个补空间 W 是 A 的不变子空间, 证明 F 可对角化. (2016年北京大学)
5. $\mathbb{F}$ 为数域, V 是 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间. A 是 V 上线性变换. 证明存在唯一可对角化线性变换 A_1 , 幂零线性变换 A_2 使得 $A = A_1 + A_2, A_1A_2 = A_2A_1$. (2017年北京大学)
6. 设 A 是2阶实矩阵, 若存在正整数 k , 使得 $A^k = 0$, 则称 A 是幂零矩阵; V 是全体2阶实矩阵组成的 R -线性空间, E_{ij} 表示 $(i, j) (i, j = 1, 2)$ 位置元素为1, 其余位置上为0的2阶矩阵. 定义映射 $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}(X) = AX - XA, X \in V$$

- (1) 证明: $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ 是 V 的一组基, $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 上的线性变换;
 - (2) 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $\mathcal{A}$ 在基 $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ 下的矩阵;
 - (3) 对于任意2阶矩阵 A , 求 $\mathcal{A}$ 在基 $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ 下的矩阵;
 - (4) 若 A 是幂零矩阵, 证明 $\mathcal{A}$ 在基 $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ 下的矩阵也是幂零的. (2013年北京工业大学)
7. 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性变换, $\mathcal{A}(\alpha_1) = 2\alpha_1, I$ 为 V 上的恒等变换, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 满足 $(\mathcal{A} - 2I)\alpha_{i+1} = \alpha_i (1, 2, \dots, n-1)$.
- (1) 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为 V 的一组基;
 - (2) 求 $\mathcal{A}$ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵. (2014年北京工业大学)
8. 设 V 是实数域 R 上的 n 维线性空间, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 V 的一组基, 于是由

$$\mathcal{A}(\alpha_i) = \alpha_{i+1} (i = 1, 2, \dots, n), \mathcal{A}(\alpha_n) = 0$$

定义了 V 的一个线性变换 $\mathcal{A}$. 回答下列问题:

- (1) 试求 $\mathcal{A}$ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵;
- (2) 证明: $\mathcal{A}^n = 0, \mathcal{A}^{n-1} \neq 0$;

(3)若 V 有一个线性变换 $\mathcal{B}$ 满足 $\mathcal{B}^n = 0, \mathcal{B}^{n-1} \neq 0$, 则存在 V 的一组基, 使得 $\mathcal{B}$ 在这组基下的矩阵与(1)中得到的矩阵相同;

(4) $\mathbb{R}$ 上的 n 阶方阵 M, N 满足 $M^n = N^n = 0, M^{n-1} \neq 0, N^{n-1} \neq 0$, 证明 M 与 N 相似. (2015年北京工业大学)

9. 设 σ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 上的线性变换. 证明:

(1)存在正整数 k , 使得对所有的 $l > k$ 都有 $\ker(\sigma^l) = \ker(\sigma^k)$;

(2) $r(\sigma) = r(\sigma^2)$ 的充要条件是 $V = \sigma(V) \oplus \ker \sigma$. (2018年北京工业大学)

10. 在线性空间 V 中, 有线性变换 σ, τ, v . 且 $v\tau - \tau v = \sigma$. 证明:

(1) $v\tau^k - \tau^k v = k\tau^{k-1}\sigma$.

(2)存在正整数 m , 使得 $\sigma^m = 0$. (2019年北京工业大学)

11. 设 T 是 n 维线性空间 V 的线性变换, 证明: T 的秩+ T 的零度 $= n$. (2010年北京交通大学)

12. 设 T 是实向量空间 V 上的线性变换, 且满足 $T^2 = I$, 这里 I 表示 V 上的恒等变换. 定义两个子空间如下:

$$V_1 = \{v \in V : T(v) = v\}; V_2 = \{v \in V : T(v) = -v\},$$

证明: $V = V_1 \oplus V_2$, 这里 $\oplus$ 表示直和. (2014年北京交通大学)

13. 设线性变换 σ 与 τ 满足 $\sigma^2 = \sigma, \tau^2 = \tau$, 证明: σ 与 τ 有相同的核的充分必要条件是 $\sigma\tau = \sigma, \tau\sigma = \tau$. (2016年北京交通大学)

14. 设 $\mathcal{A}$ 是 n 维线性空间上的线性变换, 求证:

$$\dim \operatorname{Im} \mathcal{A}^2 = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}$$

的充要条件是 $V = V_1 \oplus V_2$. (2009年北京科技大学)

15. 设线性空间 V 的线性变换 $\mathcal{A}$ 满足 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$, 称之为幂等变换, 证明:

(1) V 中向量 β 属于 $\mathcal{A}$ 的象集 $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ 当且仅当 $\mathcal{A}(\beta) = \beta$.

(2) $V = \operatorname{Im} \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}$ 且 V 的任一向量的直和分解为 $\alpha = \mathcal{A}(\alpha) + (\alpha - \mathcal{A}(\alpha))$.

(3)对任一直和分解 $V = V_1 \oplus V_0$, 存在唯一的幂等变换 $\mathcal{A}$, 使得 $V_1 = \operatorname{Im} \mathcal{A}, V_0 = \ker \mathcal{A}$.

(4)每个幂等变换都有方阵表示 $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. (2010年北京科技大学)

16. 设线性空间 $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s$. 证明: 存在 V 的线性变换 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_s$. 使得

(1) $\mathcal{A}_i^2 = \mathcal{A}_i, 1 \leq i \leq s$;

(2) $\mathcal{A}_i \mathcal{A}_j = 0, i \neq j$;

(3) $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \cdots + \mathcal{A}_s = I$ 为恒等变换;

(4) $\operatorname{Im} \mathcal{A}_i = W_i, 1 \leq i \leq s$. (2011年北京科技大学)

17. 设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 上的线性变换, 而 $\xi \in V$, 设 $\xi, \mathcal{A}(\xi), \dots, \mathcal{A}^{k-1}(\xi)$ 都不等于零, 但 $\mathcal{A}^k(\xi) = 0$. 证明:
 $\xi, \mathcal{A}(\xi), \dots, \mathcal{A}^{k-1}(\xi)$ 线性无关. (2012 年北京科技大学)

18. 设3维线性空间 V 上线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$, 记 $L(V)$ 为 V 上线性变换全体,

$$C(\mathcal{A}) = \{\mathcal{B} | \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}, \mathcal{B} \in L(V)\}.$$

(1)证明: $C(\mathcal{A})$ 是 $L(V)$ 的子空间;

(2)求 $C(\mathcal{A})$ 的一组基和维数. (2015年大连理工大学)

19. 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 分别是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 且 $\mathcal{A} + \mathcal{B} = Id_V$, 且 $r(\mathcal{A}) + r(\mathcal{B}) = n$, 证明:

(1) $V = \mathcal{A}(V) \oplus \mathcal{B}(V)$;

(2) $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A} = 0$; $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}, \mathcal{B}^2 = \mathcal{B}$. (2015 年大连理工大学)

20. 设 σ 是 n 维向量空间 V 上的一个线性幂等变换, 即 $\sigma^2 = \sigma$, 试证:

(1) σ 的特征值只能是0和1;

(2) $\sigma + \varepsilon$ 为 V 上可逆线性变换, 其中 ε 是 V 上的单位变换. (2009年湖南大学)

21. 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 的线性变换, 如果存在 V 中的一组基, 使得 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵为若当块矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

证明: (1)存在向量 $\varepsilon \in V$, 使得 $\mathcal{A}^{n-1}\varepsilon \neq 0$, 但 $\mathcal{A}^n\varepsilon = 0$;

(2) V 中包含向量 ε 的 $\mathcal{A}$ -子空间(即 $\mathcal{A}$ 的不变子空间)只有线性空间 V 自身;

(3) V 中的任一非零 $\mathcal{A}$ -子空间都包含 $\mathcal{A}^{n-1}\varepsilon$;

(4) V 不能分解为两个非平凡 $\mathcal{A}$ -子空间的直和. (2013 年湖南大学)

22. 设 $\mathcal{A}$ 是 n 维线性空间 V 的线性变换, 请给出简略说明一定存在正整数 m , 使得:

$$\mathcal{A}^{2m}V = \mathcal{A}^mV$$

(2010年湖南师范大学)

23. 设 $\mathcal{T}$ 是 n 维线性空间 V 的线性变换且 $\mathcal{T}^{n-1} \neq 0, \mathcal{T}^n = 0$, 证明: 存在 V 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 使得 $\mathcal{T}$ 在这组基下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-1} & O \end{pmatrix}. \quad (2010年湖南师范大学)$$

24. 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性变换, 且 $\mathcal{A}^{n-1} \neq 0$, $\mathcal{A}^n = 0$, 证明: (1)存在 V 的一个向量 α 使得 $\alpha, \mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}^2\alpha, \dots, \mathcal{A}^{n-1}\alpha$ 是 V 的一组基;
(2)对于整数 $1 \leq k \leq n$, 有 $\dim \mathcal{A}^k V = n - k$. (2014年湖南师范大学)

25. 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是线性空间 V 的两个线性变换, 且 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$.

(1)证明: $\mathcal{A}^{-1}(0) = \{\alpha - \mathcal{A}\alpha | \alpha \in V\}$;

(2) $\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{B}$ 当且仅当 $\mathcal{A}(V), \mathcal{A}^{-1}(0)$ 都是 $\mathcal{B}$ 的不变子空间. (2014年湖南师范大学)

26. 设 $\mathcal{A}$ 是 n 维线性空间的线性变换, 则下列条件等价:

(1) $\mathcal{A}^2 = \mathcal{I}$ (恒等变换);

(2) $\mathcal{A}$ 的特征值为 ± 1 , 且 $V = V_1 \oplus V_{-1}$, 其中 V_1, V_{-1} 分别特征值 $1, -1$ 的特征子空间;

(3) V 中有一组基, 使 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵为 $\Lambda = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$. (2015 年湖南师范大学)

27. 设 V 是 n 维线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 上线性变换, 证明下列条件等价:

(1)存在正整数 m , 使得:

$$\mathcal{A}^{2m}(V) = \mathcal{A}^m(V), (\mathcal{A}^{2m})^{-1}(0) = (\mathcal{A}^m)^{-1}(0);$$

(2) $V = \mathcal{A}^m(V) \oplus (\mathcal{A}^m)^{-1}(0)$ (2016 年湖南师范大学)

28. 设 V 是数域 K 上的线性空间, X 是一个集合. 已知存在一双射 $\varphi: X \rightarrow V$. 先在 X 上定义加法和数乘运算如下:

$$x \oplus y = \varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(y)), x, y \in X,$$

$$x \circ y = \varphi^{-1}(\lambda \varphi(x)), \lambda \in K, x \in X.$$

验证 X 关于上述定义的加法与数乘构成 K 上的一个线性空间, 并且 φ 是线性空间之间的一个同构. (2016年华东师范大学)

29. 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, α 是 V 中的向量. 已知整数 m 满足 $\varphi^m(\alpha) \neq 0$, 但 $\varphi^{n+1}(\alpha) = 0$. 求证: $\alpha, \varphi(\alpha), \dots, \varphi^m(\alpha)$ 线性无关. (2016年华东师范大学)

30. 设 $f: U \rightarrow V, g: V \rightarrow W$ 是数域 K 上有限维的线性映射, 证明:

$$\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f \cap \text{Ker } g) = \dim(\text{Ker}(gf)). \quad (2017年华东师范大学)$$

31. 设 f 与 g 是从有限维线性空间 U 到有限维线性空间 W 的两个线性映射. 若 $\text{Im } f = \text{Im } g$, 这里 $\text{Im } f$ 是 f 的像, 证明: 存在 U 上的可逆线性变换 h , 使得 $g = f \circ h$. (2018 年华东师范大学)

32. 设 K 是一个数域, m, n 为自然数, $M_{m,n}(K), M_m(K)$ 分别是数域 K 上 $m \times n$ 阶与 m 阶矩阵生成的空间, A 是秩为 n 的 $m \times n$ 阶矩阵. 定义

$$f: M_m(K) \rightarrow M_{m,n}(K), f(X) = XA.$$

- (1)证明: f 是一个线性映射;
- (2)设 $m = n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, 分别求 f 的核 $\ker f$ 的一组基与 f 的像 $\operatorname{Im} f$ 的一组基;
- (3)对于任意的 m, n, r , 求 f 的秩;
- (4)对于任意的 m, n, r , 求 f 的核 $\ker f$ 的维数. (2018年华东师范大学)
33. 设 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是数域 K 上的 n 个两两不同的数, V 是 K 上的线性空间, φ 是 V 上的线性变换, 且它在基 $\xi_1, \dots, \xi_n$ 下的矩阵为对角矩阵 $A = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.
- (1)设 W 是 φ 的不变子空间, $x_1\xi_1 + \dots + x_n\xi_n \in W$, 其中 $x_1, \dots, x_n \in K$, 证明: 若某个 x_i 不为 0, 则 $\xi_i \in W$;
- (2)求 φ 的不变子空间个数. (2018年华东师范大学)
34. 已知 $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ 是有限维复线性空间 V 上的线性变换. 设 $v \in V$, 存在 $f(\lambda) \in C[\lambda]$ 使得 $f(\mathcal{A})(v) = 0$, 则称 $f(\lambda)$ 为对 v 的零化多项式.
- (1)证明: $\mathcal{A}$ 对 v 的非零零化多项式存在;
- (2) $\mathcal{A}$ 对 v 的次数最低的首项系数为 1 的零化多项式称为极小多项式, 记为 $m_{\mathcal{A},v}(\lambda)$. 证明: 零化多项式均能被 $m_{\mathcal{A},v}(\lambda)$ 整除;
- (3)记 $\mathcal{A}$ 的极小多项式为 $m_{\mathcal{A}}(\lambda)$, 证明: 存在 $v \in V$ 使得 $m_{\mathcal{A},v}(\lambda) = m_{\mathcal{A}}(\lambda)$. (2019 年华东师范大学)
35. 设 $\mathcal{A}$ 是数域 P 上的 n 维线性空间 V 的线性变换, $f(x), g(x) \in P[x]$. 证明: (1) $f(\mathcal{A})^{-1}(0) + g(\mathcal{A})^{-1}(0) \subseteq (f(\mathcal{A})g(\mathcal{A}))^{-1}(0)$.
- (2)当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素时, 有 $f(\mathcal{A})^{-1}(0) \oplus g(\mathcal{A})^{-1}(0) = (f(\mathcal{A})g(\mathcal{A}))^{-1}(0)$. (2009年华南理工大学)
36. 设 $\mathcal{A}$ 是数域 $\mathbb{R}$ 上的 n 维线性空间 V 上的线性变换, $\mathcal{A}^2 = \varepsilon$ (恒等变换). 令 $V^+ = \{x \in V | \mathcal{A}x = x\}$, $V^- = \{x \in V | \mathcal{A}x = -x\}$. 证明: $V = V^+ \oplus V^-$. (2010 年华南理工大学)
37. 设 $\mathcal{A}$ 是 n 维线性空间 V 的一个线性变换, W 是 V 的子空间, $\mathcal{A}W$ 表示 W 中向量的像组成的子空间, 证明: $\dim(\mathcal{A}W) \geq r(\mathcal{A}) + \dim W - n$. (2011年华南理工大学)
38. 设 $\mathcal{A}$ 是 n 维线性空间 V 的一个线性变换, 证明:
- $$\dim(\mathcal{A}^{-1}(0)) + \dim(\mathcal{A}V) = n,$$
- 这里符号 $\mathcal{A}^{-1}(0)$ 表示 $\mathcal{A}$ 的核, $\mathcal{A}V$ 表示 $\mathcal{A}$ 的值域. (2012年华南理工大学)
39. 设 W 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的子空间, $\mathcal{A}$ 是 V 的一个线性变换, $\mathcal{A}W$ 表示 W 中向量的像组成的子空间. 令 $W_0 = W \cap \mathcal{A}^{-1}(0)$, 证明: $\dim(W) = \dim(\mathcal{A}W) + \dim(W_0)$. (2013年华南理工大学)
40. 用 $\mathbb{C}[x]$ 表示复数域上 $\mathbb{C}$ 次数小于 n 的多项式以及零多项式组成的线性空间. 今有 $\mathbb{C}[x]$ 到 $\mathbb{C}^n$ 的映射

$$\mathcal{A} : f(x) \mapsto (f(0), f(1), f(2), \dots, f(n-1)).$$

证明: $\mathcal{A}$ 为线性空间 $\mathbb{C}[x]$ 到线性空间 $\mathbb{C}^n$ 的同构映射. (2014年华南理工大学)

41. 设 $\mathcal{A}$ 为数域 P 上的线性空间 V 的线性变换, $f(x) \in P[x]$ 使得 $f(\mathcal{A}) = f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)$ 且 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x)$ 两两互素. 令 $V_i = (f_i(\mathcal{A}))^{-1}(0), i = 1, 2, \dots, s$. 证明: $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$. (2019年华南理工大学)

42. 已知 X 为线性变换 $\mathcal{A}$ 关于特征值 λ 的特征向量, Y 为线性变换 $\mathcal{A}'$ 关于特征值 μ 的特征向量, $\lambda \neq \mu$, 证明:

(1) $Y'X = 0$;

(2) 若 X, Y 均为实向量, 证明 X 与 Y 线性无关. (2010年华中科技大学)

43. 已知 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是复数域空间中的两个线性变换, 且

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$$

证明:

(1) $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 有一个公共的一维不变子空间 U ;

(2) 若 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 均可对角化, 证明存在一组基, 使得 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 在这一组基下的矩阵均为对角阵. (2010年华中科技大学)

44. 已知 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ 为 V 上的线性变换, 并两两可交换, 并有 $\mathcal{A}\mathcal{C} + \mathcal{B}\mathcal{D} = \mathcal{I}$ (单位变换), 证明

$$\ker \mathcal{A}\mathcal{B} = \ker \mathcal{A} + \ker \mathcal{B}$$

并且和为直和. (2012年华中科技大学)

45. V 为实数域上的 $2n+1$ 维空间, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 为 V 上的线性变换, 且 $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$, 证明存在 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, v \in V$ 且 $v \neq 0$, 使得

$$\mathcal{A}(v) = \lambda v, \mathcal{B}(v) = \mu v.$$

(2012年华中科技大学)

46. 设 V 是域 $\mathbb{F}$ 上所有 n 阶矩阵所构成的 $n \times n$ 维线性空间, 固定 M , 定义映射

$$\mathcal{A} : V \rightarrow V, \mathcal{A}(A) = MA - AM.$$

(1) 证明 $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 的线性变换;

(2)

$$M = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_\gamma \end{bmatrix}$$

为对角矩阵, 并且 $d_i = d_j (i \neq j), 1 \leq i, j \leq \gamma$, 求 $\mathcal{A}$ 的核 $\ker(\mathcal{A})$;

(3) 令 $M = \begin{bmatrix} d_1 & \\ & d_2 \end{bmatrix}$ 为对角阵, 取 V 的基

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

求 $\mathcal{A}$ 关于这组基下的矩阵.(2013年华中科技大学)

47. 设 $\mathcal{A}$ 是欧氏空间 V 的线性变换, $\mathcal{B}$ 是 V 的一个变换, 且对 $\forall \alpha, \beta \in V$, 都有

$$(\mathcal{A}(\alpha), \beta) + (\alpha, \mathcal{B}(\beta)) = 0.$$

证明:

(1) $\mathcal{B}$ 是 V 的线性变换;

(2) $\mathcal{B}$ 的值域 $\text{Im } \mathcal{B}$ 等于 $\ker \mathcal{A}$ 的正交补.(2015年华中科技大学)

48. 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

在空间 $P^{2 \times 2}$ 中定义变换 $\mathcal{A}(X) = AXB$. 证明: $\mathcal{A}(X)$ 为线性变换, 并求 $\mathcal{A}(X)$ 的特征多项式.(2017年华中科技大学)

49. 若 $R^{m \times m}$ 空间为矩阵空间, 变换 σ 为 $R^{m \times m}$ 空间中的线性变换, A, B 为 $R^{m \times m}$ 空间中的矩阵, 用定义证明: 当 $m \neq n$ 时, σ 不可逆.(2019年华中科技大学)

50. 已知线性空间 V , 其中 σ, τ 为 V 的线性变换且

$$\sigma^2 = \tau^2 = \text{id}, \sigma\tau + \tau\sigma = 0$$

其中 id 表示恒等变换, 试证明: 存在一组基使得 σ, τ 在这组基下面的矩阵分别为 $\begin{pmatrix} E & \\ & -E \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} E & \\ & E \end{pmatrix}$.(2019 年华中科技大学)

51. 设 $\mathbb{F}$ 是数域, V 表示数域 $\mathbb{F}$ 上所有次数小于 n 的多项式加上零多项式构成的线性空间. 令

$$\mathcal{A}: V \rightarrow V, f(x) \mapsto f(x+1) - f(x).$$

(1) 证明: $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性变换.

(2) 证明:

$$\gamma_0 = 1, \gamma_1 = \frac{x}{1}, \gamma_2 = \frac{x(x-1)}{2!}, \dots, \gamma_{n-1} = \frac{x(x-1) \cdots (x-n+2)}{(n-1)!}$$

是 V 的基底.

(3) 求 $\mathcal{A}$ 在上述基底下的矩阵.

(4) 证明: $\mathcal{A}$ 在上述基底对应的矩阵不能相似对角化.(2011年华中师范大学)

52. 设 $v_1, v_2, \dots, v_p$ 是 p 个互不相同的 n 维列向量. 设 M 是 $n \times m$ 复矩阵 ($p \leq m$), 它的前 l_1 列向量均为 v_1 , 它的 $l_1 + 1$ 列到 l_2 列列向量均为 v_2 , 它的最后 l_p 列列向量均为 v_p . 即 $M = (v_1, \dots, v_1, v_2, \dots, v_2, \dots, v_p, \dots, v_p)$ 为 M 按列向量分块. $\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n$ 分别表示 m 维和 n 维复列向量空间. 由 M 定义了一个线性映射

$$\mathcal{A} : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n, \alpha \rightarrow M\alpha.$$

令 $U(M)$ 是如下 m 维列向量构成的集合, 其中

$$U(M) = \left\{ (u_1, u_2, \dots, u_m)^T \in \mathbb{C}^m \mid u_1 + \dots + u_{l_1} = u_{(l_1+1)} + \dots + u_{l_2} = \dots = u_{(l_{p-1}+1)} + \dots + u_m = 0 \right\}.$$

(1) 证明: $U(M)$ 是 $\mathbb{C}^m$ 的一个子空间并求这个子空间的维数和一组基底.

(2) 证明: $U(M)$ 是 $\mathcal{A}$ 的核空间 $\ker(\mathcal{A})$ 的子空间, 并给出 $U(M) = \ker(\mathcal{A})$ 的充分必要条件. (2013年华中师范大学)

53. 设 $\mathcal{A}$ 是从 $\mathbb{F}$ - 向量空间 V 到 U 的线性映射, 若对 V 的任意生成组 Ω 都有 $\mathcal{A}(\Omega) = \{\mathcal{A}(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$ 是 U 的生成组. 证明 $\mathcal{A}$ 一定是满的线性映射. (2016年华中师范大学)

54. 设 V, U 是数域 $\mathbb{F}$ 上的有限维向量空间, 且 V 的维数是 n . 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是 V 的一组基底, 而 $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ 是 U 中任意 n 个向量. 证明: 存在唯一的从 V 到 U 的线性映射 $\mathcal{A}$ 满足

$$\mathcal{A}(\alpha_i) = \gamma_i, i = 1, \dots, n.$$

(2017年华中师范大学)

55. 设 σ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, $\sigma(V)$ 的一组基为 $\beta_1, \dots, \beta_n$, α_i 是 β_i 的原像, 即 $\sigma(\alpha_i) = \beta_i, i = 1, 2, \dots, n, W = L(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$. 证明:

(1) $V = W \oplus \sigma^{-1}(0)$;

(2) σ 的秩 + σ 的零度 = n . (2009年兰州大学)

56. 设 σ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换. 证明: $r(\sigma^2) = r(\sigma)$ 的充分必要条件为

$$V = \sigma(V) \oplus \sigma^{-1}(0).$$

(2015年兰州大学)

57. 设 $\mathcal{A}$ 是有限维线性空间 V 的线性变换, 证明: $V = \mathcal{A}V \oplus \mathcal{A}^{-1}(0)$ 充要条件是 $\mathcal{A}^2V = \mathcal{A}V$. (2009年南京师范大学)

58. 设 n 维线性空间上的线性变换 $\mathcal{A}$ 的特征多项式为

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2}, \lambda_1 \neq \lambda_2,$$

并且有

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\alpha_1 &= \lambda_1\alpha_1, (\mathcal{A} - \lambda_1\varepsilon)\alpha_2 = \alpha_1, \dots, (\mathcal{A} - \lambda_1\varepsilon)\alpha_{n_1} = \alpha_{n_1-1}, \\ \mathcal{A}\beta_1 &= \lambda_2\beta_1, (\mathcal{A} - \lambda_2\varepsilon)\beta_2 = \beta_1, \dots, (\mathcal{A} - \lambda_2\varepsilon)\beta_{n_2} = \beta_{n_2-1},\end{aligned}$$

证明: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_1}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n_2}$ 构成整个线性空间的一组基, 并写出 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵.
(2009年南京师范大学)

59. 设 σ 是 n 维线性空间 V 的线性变换, 证明: $\sigma(V)$ 的一组基的原像及 $\sigma^{-1}(0)$ 的一组基合起来就是 V 的一组基. (2012 年南京师范大学)

60. 证明: n 维 ($n > 2$) 实线性空间 V 的一个线性变换 σ 必有一维或二维不变子空间. (2014年南京师范大学)

61. 设 σ 和 τ 是 n 维线性空间 V 的两个线性变换, 满足 $\sigma + \tau = \varepsilon$ (恒等变换), 且 $\sigma\tau = 0$. 证明:

$$V = \sigma(V) \oplus \tau(V).$$

(2015年南京师范大学)

62. 证明: 若线性变换 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 满足

$$\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}, \mathcal{B}^2 = \mathcal{B}, \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A} = 0$$

则 $(\mathcal{A} + \mathcal{B})V = \mathcal{A}V \oplus \mathcal{B}V$. (2017 年南京师范大学)

63. 设 P 为数域, T 为 $P^{n \times n}$ 上的线性变换, 满足条件: 对任何固定的 $A, B \in P^{n \times n}$, $T(AB) = T(A)T(B)$ 和 $T(AB) = T(B)T(A)$ 至少有一个成立. 证明: 或者对所有的 $A, B \in P^{n \times n}$ 成立 $T(AB) = T(A)T(B)$ 或者对所有的 $A, B \in P^{n \times n}$ 成立 $T(AB) = T(B)T(A)$.

64. 设 V 为 n 维复线性空间, $\text{End } V$ 为 V 上所有线性变换构成的线性空间, 又 A, B 为 $\text{End } V$ 的子空间, 且 $A \subseteq B$. 令:

$$M = \{x \in \text{End } V | xy - yx \in A, \forall y \in B\}$$

假定 $x_0 \in M$ 满足条件 $\text{tr}(x_0 y) = 0, \forall y \in M$. 证明: x_0 必为幂零线性变换. (2010年南开大学)

65. 设 V 为复数域上的 $4n$ 维线性空间, 证明: 存在 V 上的线性变换 T 使得 $T^4 = -\text{id}$, 其中 id 为恒等变换, 并且满足上述条件的线性变换必然在某组基下的矩阵为对角矩阵. (2011 年南开大学)

66. (20 分) $\mathcal{A}$ 为 n 维线性空间 V 上的线性变换, 特征多项式为

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{r_s}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 各不相同, 且 $r_1 + r_2 + \cdots + r_s = n$, 令 $f_i(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)^{r_i}}$, 证明:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$$

其中 $V_i = \text{Im } f_i(\mathcal{A})$. (2016年南开大学)

67. 设 V 为复数域上的 n 维线性空间, σ, τ 为 V 中的两个线性变换, 如果 $\sigma\tau = \tau\sigma$, 证明 σ, τ 至少有一个公共的特征向量. (2017年南开大学)

68. 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 均是线性空间 V 上的线性变换, 且 $\text{Ker } \mathcal{A} \subset \text{Ker } \mathcal{B}$, 证明: 存在线性变换 $\mathcal{T}$, 使得 $\mathcal{A} = \mathcal{T}\mathcal{B}$.

69. 设 V 为 n 维欧氏空间, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 为 V 到 V 的映射, k 为固定非零实数, 且 $\forall \alpha, \beta \in V$ 有

$$(\mathcal{A}\alpha, \beta) = k(\alpha, \mathcal{B}\beta)$$

(1) 求证 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 为 V 上线性变换;

(2) 如果 $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, 且 $\mathcal{A}$ 为非零映射, 求证 $k = 1$ 或者 $k = -1$. (2010年上海大学)

70. (15 分) 设 V 是全体实 2×2 矩阵所构成的实线性空间, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V$, 定义 V 的变换 $\mathcal{A}x = Ax, \forall x \in V$.

(1) 证明: 变换 $\mathcal{A}$ 是线性的.

(2) 当 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ 时, 求 $\mathcal{A}$ 的核和值域及它们的一组基. (2014 年上海大学)

71. 设 $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_s$ 为数域 F 上 n 维线性空间 V 上的两两不同的线性变换. 证明: 存在 $v \in V$, 满足 $\mathcal{A}_i v \neq \mathcal{A}_j v$ 对任意 $i \neq j$. (2010 年上海交通大学)

72. V 为代数闭域 F 上的 n 维线性空间, $\mathcal{A}$ 为 V 上的线性变换. 证明: 存在唯一的 V 上的线性变换 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$, 满足 $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{C}$, $\mathcal{B}$ 是可对角化的, $\mathcal{C}$ 是幂零的, 且 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{C}$ 可交换. (2011年上海交通大学)

73. 设 $A \in P^{n \times n}$, 定义由 $P^{n \times n}$ 到自身的映射 T 为: 对任意 $X \in P^{n \times n}$, 有 $T(X) = XA$.

(1) 简要证明 T 是线性变换;

(2) 试问 T 是否可逆? 为什么?

(3) 已知 $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, n = 2$, 求 T 在基 $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ 下的矩阵. 其中: $E_{ij}, i = 1, 2; j = 1, 2$ 为 (i, j) 元是 1, 其余元是 0 的二阶方阵. (2014年上海交通大学)

74. 设 $A \in C^{m \times n}$, 视 A 为 $C^n \rightarrow C^m$ 的线性映射, 证明:

$N(A) \perp R(A^H)$ 且 $C^n = N(A) \oplus R(A^H)$ 其中: C 为复数域, $N(A)$ 为 A 的零空间(即核), $R(A)$ 为 A 的象空间(即值域). (2015年上海交通大学)

75. 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 为 n 维线性空间 V 上的线性变换, 使得 $(\mathcal{B}\mathcal{A})^2 = \varepsilon$ (其中 ε 是 V 上的恒等变换), $\mathcal{C} = \varepsilon - \mathcal{A}\mathcal{B}$, 证明:

$$\ker(\mathcal{C}) = \text{Im}(\mathcal{C} - 2\varepsilon)$$

(2013年首都师范大学)

76. 设 V 是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是 V 的一个基. 设 V 上的一个线性变换 $\mathcal{A}$ 满足 $\mathcal{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)\mathcal{A}$, 且 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ 证明: $\ker \mathcal{A} + \text{Im} \mathcal{A}$ 是直和, 这里, $\ker \mathcal{A}$ 和 $\text{Im} \mathcal{A}$ 分别是 $\mathcal{A}$ 的核和像. (2010年四川大学)

77. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间, $\text{End}(V)$ 表示 V 上的全体线性变换组成的线性空间.

(1) 求 $\dim \text{End}(V)$ 并写出 $\text{End}(V)$ 的一组基.

(2) 设 $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$, 设 $\mathcal{A}$ 的特征多项式为 $f(x)$. 证明: 如果 V 可以分解为非平凡的 $\mathcal{A}$ 不变子空间的直和, 那么, $f(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 上可约. 问: 此结论的逆命题是否成立? 说明理由. (2011年四川大学)

78. 设 A, B 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 $m \times n$ 型矩阵, $M_{m \times n}(\mathbb{F}), M_{n \times m}(\mathbb{F})$ 分别是 $\mathbb{F}$ 上的所有 $m \times n$ 型矩阵, $n \times m$ 型矩阵组成的线性空间. 证明: 当 $m \neq n$ 时, 由

$$f(X) = ABX, X \in M_{n \times m}$$

给出的从 $M_{n \times m}(\mathbb{F})$ 到 $M_{m \times n}(\mathbb{F})$ 的线性映射 f 不是可逆的. (2012年四川大学)

79. 设 $T: V \rightarrow W$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间之间的线性映射.

(1) 证明: T 是单射当且仅当对任意满足 $TS = 0$ 的线性映射 $S: U \rightarrow V$, 都有 $S = 0$; T 是满射当且仅当对任意满足 $RT = 0$ 的线性映射 $R: W \rightarrow X$, 都有 $R = 0$.

(2) 设 $\dim V < \infty, \dim W < \infty$. 设 W_1 是 W 的子空间. 证明:

$$\dim T^{-1}(W_1) \geq \dim V - \dim W + \dim W_1.$$

(2012年四川大学)

80. 设 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的有限维线性空间, H 是由 V 上的两两可交换且可对角化的线性变换组成的线性空间. 证明: 存在若干线性函数 $\alpha_i: H \rightarrow \mathbb{C}$ 使得有如下的子空间直和分解:

$$V = \bigoplus_{i=1}^m V_i.$$

其中 $V_i = \{v \in V | h(v) = \alpha_i(h)v, \forall h \in H\}$. (2012年四川大学)

81. 设 A 是实数域上的 $m \times n$ 型矩阵. 设 $f: F^n \rightarrow F^m$ 是映射 $X \mapsto AX$. 证明: f 是单射当且仅当 A 的列向量线性无关; f 是满射当且仅当 A 的行向量线性无关. (2013年四川大学)

82. 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵, A 的特征多项式在 $\mathbb{F}$ 上不可约. 设 $M_n(\mathbb{C})$ 是所有 n 阶复方阵组成的线性空间.

(1) 证明: A 是可逆矩阵.

(2) 设 σ_A 是 $M_n(\mathbb{C})$ 上的如下线性变换:

$$\sigma_A(X) = A^{-1}X - XA^{-1}, X \in M_n(\mathbb{C}).$$

记 σ_A 的核为 $\ker \sigma_A$, σ_A 的像为 $\text{Im} \sigma_A$. 求 $\ker \sigma_A \cap \text{Im} \sigma_A$ 的维数. (2013年四川大学)

83. 设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间, $End(V)$ 是 V 的所有线性变换组成的集合.

(1) 证明: 对任意 $0 \neq \alpha \in V$ 都有 $V = \{A\alpha | A \in End(V)\}$.

(2) 不用Hamilton-Cayley定理直接证明: 对任意 $A \in End(V)$ 都存在 F 上的多项式 $f(x)$ 使得 $f(A) = 0$

(3) 上述两个结论对无穷维线性空间是否成立? 简要说明理由. (2014年四川大学)

84. 设 V 是数域 F 上的线性空间, V^* 是 V 的对偶空间, T 是 V 上的线性变换.

(1) 对任意 $f \in V^*$, 定义 V 上的函数 $f^*: V \rightarrow F$ 为: $f^*(\alpha) = f(T(\alpha)), \alpha \in V$. 证明: 映射 $T^*: f \mapsto f^*$ 是 V^* 上的线性变换.

(2) 设 $\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是 V 的一组基, 且 T 在这个基下的矩阵为 A . 求 T 中的线性变换 T^* 在对偶基 $\alpha_1^*, \alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*$ 下的矩阵.

(3) 设 $\dim V = n$. 证明: T 是 V 上的可逆线性变换当且仅当 T^* 是 V^* 上的可逆线性变换. (2015年四川大学)

85. 设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间, T 是 V 上的线性变换, $\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$ 互不相同, 且都不是 T 的特征值; I 是 V 上的恒等变换.

(1) 证明: 对每个 $1 \leq i \leq n, T - \lambda_i I$ 都是 V 的可逆线性变换.

(2) 证明: 存在 $a_1, a_1, \dots, a_n \in F$ 使得

$$\sum_{k=1}^n a_k (T - \lambda_k I)^{-1} = I.$$

(2015年四川大学)

86. 设 A 是数域 F 上的有限维线性空间 V 上的线性变换.

(1) 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in F$ 是 A 的互不相同的特征值, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 分别是 A 的属于 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ 的特征向量. 证明: 如果 A 的一个不变子空间满足 $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k \in W$, 则 $\dim W \geq k$.

(2) 给出一个非零的、既不是单射也不是满射的 A 的例子.

(3) 设 $C(A)$ 是 V 的所有与 A 可交换的线性变换组成的集合. 求 A 使得 $\dim C(A)$ 最大.

(4) 设 F 是复数域且 A 可逆. 证明: 存在 V 上的线性变换 B 使得 $B^2 = A$. (2016年四川大学)

87. 设 V 是 n 维线性空间, $V_1, V_2, \dots, V_s (s > 1)$ 是 V 的子空间, 且

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s.$$

证明: 存在 V 上的线性变换, 使得

$$1. \sigma_i^2 = \sigma_i (1 \leq i \leq s);$$

$$2. \sigma_i \sigma_j = 0 (1 \leq i, j \leq s \text{ 且 } i \neq j);$$

$$3. \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_s = \varepsilon \text{ 是恒等变换};$$

$$4. \sigma_i(V) = V_i (1 \leq i \leq s). (2011年武汉大学)$$

88. 设 σ_1, σ_2 都是 n 维线性空间 V 的线性变换, 证明: $\ker(\sigma_1) \subset \ker(\sigma_2)$ 的充要条件是存在 V 的一个线性变换 σ , 使得 $\sigma_2 = \sigma\sigma_1$. (2013年武汉大学)

89. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 n 阶实对称矩阵 A 的全部特征值, 但 $-\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 不是 A 的特征值, 定义 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 的线性变换

$$\sigma(X) = A^T X + X A, \forall X \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

证明:

1. σ 是可逆线性变换;

2. 对任意实对称矩阵 C , 必存在唯一的实对称矩阵 B , 使得 $A^T B + B A = C$. (2013年武汉大学)

90. 设数域 K 上的 n 维线性空间 V 到 m 维线性空间 V' 上的所有线性映射组成空间 $\text{Hom}_K(V, V')$, 证明:

(1) $\text{Hom}_K(V, V')$ 是线性空间;

(2) $\text{Hom}_K(V, V')$ 的维数为 mn . (2014年武汉大学)

91. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ 是线性空间 V 中的一组基, φ 是线性空间 V 上的线性变换, 且

$$\varphi(\alpha_1) = \alpha_1, \varphi(\alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2, \varphi(\alpha_3) = \alpha_2 + \alpha_3, \varphi(\alpha_4) = \alpha_3 + 2\alpha_4, \varphi(\alpha_5) = 2\alpha_5, \varphi(\alpha_6) = \alpha_5 + 3\alpha_6.$$

1. 求出所有二维的 φ 的不变子空间, 并说明理由;

2. 证明 φ 不是循环变换, 即 $\forall \alpha \in V, \alpha, \varphi(\alpha), \varphi^2(\alpha), \dots, \varphi^5(\alpha)$ 不构成一组基. (2015年武汉大学)

92. 设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间, σ 是 V 上的线性变换. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 V 的一个基, 线性变换 σ 在这个基下的矩阵为 A , 记 $\text{End}V$ 是 V 上全体线性变换构成的线性空间, 作 $\text{End}V$ 到 $M_n(F)$ 的映射 $f: f(\sigma) = A$. 证明: 映射 f 是 $\text{End}V$ 到 $M_n(F)$ 的一个同构映射. (2017年武汉大学)

93. 设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 V 的一组基, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 是 V 任意 n 个向量. 证明: 存在唯一线性变换 σ , 使得 $\sigma(\alpha_i) = \beta_i, i = 1, 2, \dots, n$. (2018年武汉大学)

94. 设 σ 是数域 F 上向量空间 V 上一个线性变换, 且满足 $\sigma^2 = \sigma$, 证明:

1. $\ker \sigma = \{\xi - \sigma(\xi) | \xi \in V\}$;

2. $V = \ker \sigma \oplus \text{Im} \sigma$;

3. 如果 τ 是 V 上的另一个线性变换, 则 $\ker \tau$ 和 $\text{Im} \sigma$ 都在 τ 之下不变的充要条件是 $\tau \sigma = \sigma \tau$. (2018年武汉大学)

95. 设 P 是数域, 集合

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in P \right\}.$$

(1) 证明: W 对于矩阵加法和数量乘法构成一个线性空间.

(2) 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 变换 $\mathcal{A}: W \rightarrow W$ 定义为 $\mathcal{A}(X) = AX (\forall X \in W)$. 证明: $\mathcal{A}$ 是 W 的线性变换.

(3) 写出 W 的一组基及维数, 求 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵.

(4) 求出 $\mathcal{A}$ 的特征值及相应的全部特征向量. (2011年湘潭大学)

96. 设 $\mathcal{A}$ 是有限维线性空间 V 的可逆线性映射, W 是 V 中 $\mathcal{A}$ 的不变子空间. 证明: W 也是 V 中 $\mathcal{A}^{-1}$ 的不变子空间. (2011年湘潭大学)

97. 设 P 是一数域, 集合

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in P, a + b = 0 \right\}.$$

(1) 证明: V 对于矩阵的加法和数量乘法构成线性空间.

(2) 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 变换 $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ 定义为 $\mathcal{A}(X) = AX, \forall X \in V$. 证明: $\mathcal{A}$ 是 V 的线性变换.

(3) 写出 V 的一组基, 并求 $\mathcal{A}$ 在这一组基下的矩阵.

(4) 求出 $\mathcal{A}$ 的特征值及其全部特征向量. (2012年湘潭大学)

98. 令 $\mathcal{A}$ 为有限维线性空间 V 的线性变换, 证明: $\mathcal{A}^2$ 的秩等于 $\mathcal{A}$ 的秩当且仅当 $V = \mathcal{A}V \oplus \mathcal{A}^{-1}(0)$ 其中 $\mathcal{A}V$ 表示 $\mathcal{A}$ 的值域, $\mathcal{A}^{-1}(0)$ 表示 $\mathcal{A}$ 的核. (2014年湘潭大学)

99. 令 $M_n(\mathbb{R})$ 为实数域上所有 n 阶矩阵构成的线性空间, 变换 $\mathcal{A}: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ 定义为:

$$\mathcal{A}(X) = AX + XA, \forall X \in M_n(\mathbb{R}),$$

其中 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 为实对称矩阵.

(1) 给出 $M_n(\mathbb{R})$ 的维数和一组基.

(2) 证明: $\mathcal{A}$ 为线性变换.

(3) 证明: $\mathcal{A}$ 可对角化, 即 $\mathcal{A}$ 在 $M_n(\mathbb{R})$ 的某一组基下的矩阵为对角阵. (2015年湘潭大学)

100. 令 V 为复数域上的 n 维线性空间, 线性变换 $\mathcal{A}$ 在 V 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵为下三角若当块, 证明:

(1) $V_i = L(\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$ 为 $\mathcal{A}$ 不变子空间.

(2) V 中任意非零的 $\mathcal{A}$ 不变子空间都包含有 α_n . (2015年湘潭大学)

101. 令 $P[x]_n$ 为数域 P 上次数小于 n 的多项式所构成的线性空间, 定义 $P[x]_n$ 上的变换为

$$\mathcal{A}(f(x)) = (n-1)f(x) - xf'(x), \forall f(x) \in P[x]_n,$$

其中 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的微分. 证明:

(1) $\mathcal{A}$ 是 $P[x]_n$ 上的线性变换.

(2) 求线性变换 $\mathcal{A}$ 的值域 $\mathcal{A}P[x]_n$ 与核 $\mathcal{A}^{-1}(0)$.

(3) 证明:

$$P[x]_n = \mathcal{A}P[x]_n \oplus \mathcal{A}^{-1}(0).$$

(2016年湘潭大学)

102. 令 n 阶矩阵 A 的零特征值的个数为 s , 其特征子空间 $V = \{X | AX = 0\}$ 的维数为 k . 证明: $r(A) = r(A^2)$ 当且仅当 $s = k$. (2017年湘潭大学)
103. 令 $\lambda = \alpha + i\beta$ 为 n 阶实矩阵 A 的特征值且 $\beta \neq 0$, 及相应特征向量为 $v = x + iy$, 其中 $i = \sqrt{-1}$. 证明:
 (1) $L(x, y)$ 是 A 的2维不变子空间.
 (2) 存在可逆矩阵 X 使得 $X^{-1}AX = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$, 其中 $A_{11} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. (2017年湘潭大学)
104. 令 $\mathcal{A}$ 为有限维线性空间 V 的线性变换, 且 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ 证明:
 (1) $\mathcal{A}^{-1}(0) = \{\alpha - \mathcal{A}\alpha | \alpha \in V\}$.
 (2) $V = \mathcal{A}V \oplus \mathcal{A}^{-1}(0)$. (2018年湘潭大学)
105. 设 V 是复数域上的 n 维线性空间, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是 V 上的线性变换, 且 $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$, 证明:
 (1) $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 至少有一个公共的特征向量.
 (2) 在 V 中存在一组基, 使得 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 在这组基下的矩阵同时为对角阵. (2018年湘潭大学)
106. 设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 的线性变换, α 是 V 中的非零向量, m 是大于1的正整数, 如果向量组 $\alpha, \mathcal{A}(\alpha), \dots, \mathcal{A}^{m-1}(\alpha)$ 线性无关, 而向量组 $\alpha, \mathcal{A}(\alpha), \dots, \mathcal{A}^{m-1}(\alpha), \mathcal{A}^m(\alpha)$ 线性相关.
 (1) 证明: 由 $\alpha, \mathcal{A}(\alpha), \dots, \mathcal{A}^{m-1}(\alpha)$ 生成的子空间 W 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间;
 (2) 求 W 的一组基, 并求 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵. (2014年云南大学)
107. 设 Φ, Ψ 是某数域上 n 维线性空间上的两个线性变换, 满足 $\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi$, 而且存在正整数 N 使得 $\Phi^N = 0$ 为零线性变换, 证明 $\Phi + \Psi$ 为可逆线性变换的充要条件是 Ψ 为可逆线性变换. (2010年浙江大学)
108. 设 A 是 n 阶线性空间 V 的线性变换, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 为 A 的不同特征值, V_{λ_i} 为其特征子空间. 证明: 对任意 V 的子空间 W , 有

$$W = (W \cap V_{\lambda_1}) \oplus \dots \oplus (W \cap V_{\lambda_m}).$$
 (2014年浙江大学)
109. 设 $f: v \rightarrow w$ 为线性满映射.
 (1) $\forall \alpha \in w, f^{-1}(\alpha) = \beta + \ker(f)$ (β 为 v 上任意一个向量满足 $f(\beta) = \alpha$);
 (2) 适当定义乘法和下面定义的加法:
 证明: $v/\ker(f) = \{\beta + \ker(f) | \beta \in v\}$ 构成空间;
 (3) 适当定义同构映射, 证明 $v/\ker(f)$ 与 $\text{Im}(f)$ 同构. (2015年浙江大学)
110. 设 T 是复数域上 n 维线性空间 V 的线性变换, 满足 $T^k = id_V$ (V 上的恒等线性变换), 其中 $1 \leq k \leq n$, 证明 T 必然可以对角化. (2016年浙江大学)
- item 已知 V 是复线性空间, 对任意的 $A \in V$, 定义变换 $\sigma(A) = \overline{A}$, 证明当 V 是实数域上的复线性空间时, σ 是 V 上的线性变换, 并求 V 的一组基, 使得 σ 在这组基下的矩阵为对角阵, 同时说明当 V 是复数域上的复线性空间时, σ 不是 V 上的线性变换. (2017年浙江大学)

111. 设 $\mathcal{A}: U \rightarrow V$ 为数域 F 上的线性空间 U 到 V 上的线性映射. 证明:

$$\dim \text{Ker} \mathcal{A} + \dim \text{Im} \mathcal{A} = \dim U.$$

(2010年中科大)

112. 设数域 F 上有限维空间 V 上线性变换 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 满足 $\mathcal{A}\mathcal{B} = a\mathcal{B}\mathcal{A}$ ($a \in F, a \neq 1$), 且 $\mathcal{A}$ 是可逆线性变换, 证明:

(1) $\mathcal{B}$ 为幂零矩阵;

(2) $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 有一个公共特征向量. (2010年中科大)

113. 设 $\mathcal{A}$ 是无限维线性空间 V 的线性变换, $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 在 $\text{Im} \mathcal{A}$ 上的限制变换. 求证: $V = \text{Im} \mathcal{A} \oplus \text{Ker} \mathcal{A}$ 的充要条件是 $\mathcal{B}$ 可逆. (2011年中科大)

114. 设 $\mathcal{A}$ 是数域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换. 已知 $\mathcal{A}$ 的特征多项式 $\varphi_{\mathcal{A}}(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda)$, 其中 $f(\lambda), g(\lambda)$ 是数域 F 上两个互素的多项式. 求证:

(1) $\text{Im} f(\mathcal{A}) = \text{Ker} g(\mathcal{A})$;

(2) $V = \text{Im} f(\mathcal{A}) \oplus \text{Im} g(\mathcal{A})$. (2012年中科大)

115. 设 $\mathcal{A}$ 是数域 F 上的有限维线性空间 V 上的线性变换, 求证:

$$\dim(\text{Im} \mathcal{A} \cap \text{Ker} \mathcal{A}) = \text{rank} \mathcal{A} - \text{rank} \mathcal{A}^2.$$

(2013年中科大)

116. 设 $\mathcal{A}$ 是数域 F 上的线性空间 V 上的线性变换, $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 是 F 上的多项式, $g(x)$ 是 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的最大公约式, $h(x)$ 是 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的最小公倍式. 求证: $\text{Ker} h(\mathcal{A}) = \text{Ker} f_1(\mathcal{A}) \oplus \text{Ker} f_2(\mathcal{A})$ 的充要条件是 $g(\mathcal{A})$ 可逆. (2013年中科大)

117. 设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 上的线性变换. 求证: 存在 V 的子空间 W 与 $\text{Im} \mathcal{A}$ 同构, 并且 $V = W \oplus \text{Ker} \mathcal{A}$. (2014年中科大)

118. 设 $\mathcal{A}$ 是 n 维实线性空间 V 的线性变换, $n \geq 1$. 求证: $\mathcal{A}$ 至少存在一个一维或者二维的不变子空间. (2010年国科大)

119. 设 $M_n(\mathbb{C})$ 是复数域上所有 n 阶方阵组成的线性空间, $T: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ 是线性映射, 满足 $T(AB) = T(BA)$, 求证: $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, 总存在 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $T(A) = \lambda \text{tr}(A)$. (2010年国科大)

120. 设 $T_1, T_2, \dots, T_n$ 是数域 F 上线性空间 V 的非零线性变换, 试证明存在向量 $\alpha \in V$, 使得 $T_i(\alpha) \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$. (2012年国科大)

121. 设 V 是数域 F 上的有限维向量空间, ϕ 是 V 上的线性变换.证明: V 能够分解为两个子空间的直和 $V = U \oplus W$.其中 U, W 满足:对任意的 $u \in U$,存在正整数 k 使得 $\phi^k(u) = 0$;对任意的 $w \in W$,存在 $v_m \in V$,使得 $w = \phi^m(v_m)$ 对所有的正整数 m 成立. (2013年国科大)

122. 设 V 是实数域上的 n 维向量空间, ϕ 是 V 上的线性变换,满足 $\phi^3 = -\varepsilon$ (ε 是 V 上的恒等变换).

(1)证明 n 是偶数.

(2)若 ψ 是 V 上的线性变换,满足 $\psi\phi = \phi\psi$,证明 $\det(\psi) \geq 0$. (2013年国科大)

123. 线性空间 V 的两个线性变换 f, g 满足 $\text{Ker} f \subseteq \text{Ker} g$,证明

(1)存在线性变换 h ,使得 $g = hf$.

(2)若 $\text{Ker} f = \text{Ker} g$,则存在线性变换 g ,使得 $g = hf$. (2015年国科大)

124. 设 V 为数域 P 上的线性空间, $\mathcal{A}$ 为 V 的线性变换, $f(x), g(x) \in P[x], h(x) = f(x)g(x)$.证明:若 $(f(x), g(x)) = 1$,则

$$\text{ker} h(\mathcal{A}) = \text{ker} f(\mathcal{A}) \oplus \text{ker} g(\mathcal{A}).$$

(2010年中南大学)

125. 设 V 是数域 F 上一个有限维向量空间, $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ 是一个线性变换.设 $v \in V, v \neq 0$,且 V 由 $\{v, \mathcal{A}v, \dots, \mathcal{A}^j v, \dots\}$ 生成.

(1)证明:存在一个正整数 $k \geq 1$ 使得 $v, \mathcal{A}v, \dots, \mathcal{A}^{k-1}v$ 是线性无关的,且

$$\mathcal{A}^k v = \alpha_0 v + \alpha_1 \mathcal{A}v + \dots + \alpha_{k-1} \mathcal{A}^{k-1} v,$$

这里 $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1} \in F$.

(2)证明: $\{v, \mathcal{A}v, \dots, \mathcal{A}^{k-1}v\}$ 是 V 的一组基.

(3)证明: $\mathcal{A}$ 的最小多项式等于特征多项式.

(4)证明:如果

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

那么不存在列向量 $v \in \mathbb{R}^4$,使得 $\mathbb{R}^4$ 由 $\{v, Av, \dots, A^j v, \dots\}$ 生成. (2011年中南大学)

126. 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是复数域上 $n(n > 0)$ 维线性空间 V 的两个线性变换.满足 $\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{A}$.如果 λ_0 是 $\mathcal{A}$ 的一个特征值, η 是 $\mathcal{A}$ 的属于 λ_0 的一个特征向量, m 是使 $\eta, \mathcal{B}\eta, \dots, \mathcal{B}^m \eta$ 线性相关的最小正整数, W_m 是由 $\eta, \mathcal{B}\eta, \dots, \mathcal{B}^{m-1} \eta$ 所生成的线性子空间.

(1)证明 W_m 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间.

(2)求 $\mathcal{A}|_{W_m}$ 的迹,其中 $\mathcal{A}|_{W_m}$ 是 $\mathcal{A}$ 在 W_m 上的限制. (2012年中南大学)

127. 设 $\mathcal{A}$ 是复数域上 n 维线性空间 V 的一个非零且不可逆线性变换, 证明: 存在 $\mathcal{A}$ 的不变子空间 V_1 和 V_2 , 使得

$$V = V_1 \oplus V_2,$$

且 $\mathcal{A}|_{V_1}$ 为可逆变换, $\mathcal{A}|_{V_2}$ 为幂零变换. (2014年中南大学)

128. 设 $\mathcal{A}$ 是数域 P 上的 n 维线性空间 V 的一个线性变换. 若 $\ker \mathcal{A}^k = \ker \mathcal{A}^{k+1}$, 其中 k 为某个正整数, 证明:

$$V = \ker \mathcal{A}^k \oplus \operatorname{Im} \mathcal{A}^k.$$

(2015年中南大学)

129. 设 $\mathcal{A}$ 为复数域上 n 维线性空间 V 上的一个线性变换, 且

$$\operatorname{tr}(\mathcal{A}^k) = 0 (k = 1, 2, \dots, n).$$

证明: $\mathcal{A}$ 是幂零变换. (2016年中南大学)

130. 设 $\mathcal{A}$ 是实数域上 $n (n \geq 1)$ 维线性空间 V 上的一个线性变换. 证明: $\mathcal{A}$ 至少有一个维数是 1 或 2 的不变子空间. (2016年中南大学)

131. 在数域 F 上, 线性空间 V 上的一个线性变换 $\mathcal{A}$ 满足 $\mathcal{A}^3 = I$, I 为恒等变换, 证明:

$$V = \ker(\mathcal{A} - I) \oplus \ker(\mathcal{A}^2 + \mathcal{A} + I).$$

(2017年中南大学)

132. 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $f(A)$ 是 $\mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ 的一个线性映射.

(1) 证明: 对任意的 A , 都有唯一的 $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 使得

$$f(A) = \operatorname{tr}(AC).$$

(2) 对 $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 若有 $f(AB) = f(BA)$, 证明:

$$f(A) = \lambda f(E), \lambda = \operatorname{tr}(A).$$

(2017年中南大学)

133. 设 $f(x), g(x)$ 是数域 F 上的多项式, $m(x) = [f, g]$ 是它们的首一最小公倍式, σ 是 F 上线性空间 V 的一个线性变换. 证明:

$$\ker f(\sigma) + \ker g(\sigma) = \ker m(\sigma).$$

(2010年中山大学)

134. 设 σ 是复线性空间 V 的一个线性变换.证明: σ 相似于对角矩阵当且仅当对任意 σ 子空间 U 都有 σ 子空间 U' 使得 $V = U \oplus U'$.(2010年中山大学)
135. 设 A, B 是 n 阶实对称矩阵,且 B 是正定矩阵.证明:存在实可逆矩阵 C 使得 $C^T A C$ 和 $C^T B C$ 都是实对角矩阵. (2010年中山大学)
136. 设 V 是数域 F 上的线性空间, S 和 T 是 V 的子空间, f 是 V 上的线性变换. V^* 表示 V 的对偶空间, S^0 表示 S 的零化子,即 $S^0 = \{f \in V^* : f(S) = 0\}$,而 f^* 表示 f 的转置,即 $f^* : V^* \rightarrow V^*, g \mapsto gf, \forall g \in V^*$.证明:
 (1) $(S \cap T)^0 = S^0 + T^0$;
 (2) $Im f^* = (ker f)^0$.(2011年中山大学)
137. 设 f 是 F 上的线性空间 $M_n(F)$ 到 F 的线性映射, $f(I) = n$ 且对任意的矩阵 $A, B \in M_n(F)$ 有 $f(AB) = f(BA)$.证明: $f = tr$. (2013年中山大学)
138. 设 V 是数域 F 上的 n 为线性空间, σ, τ 都是 V 上的线性变换, V 是 σ 循环子空间,且 $\sigma\tau = \tau\sigma$.证明:存在某个多项式 $f(x)$ 使得 $\tau = f(\sigma)$. (2014年中山大学)
139. 设 σ, τ 为 n 维线性空间 V 上的线性变换, id_V 是 V 上的恒等变换.证明:若 $\sigma\tau = id_V$,则 $\tau\sigma = id_V$. (2017年中山大学)
140. 设 σ 是 n 维实向量空间 V 上的线性变换,并且有正整数 m 使得 σ^m 是 V 上的恒等变换.证明在 V 中存在一组基使得 σ 在这组基下的矩阵为正交矩阵. (2018年中山大学)

五.问答题

1. 设 $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_{2012}$ 为线性空间上的2012个互不相同的线性变换, 问是否存在向量 $\alpha \in V$ 使得

$$\mathcal{A}_1\alpha, \dots, \mathcal{A}_{2012}\alpha \text{ 都不相等}$$

. (2012年北京大学)

2. 下列 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 是否可以对角化?

(1) $\mathcal{A}(x, y) = (x - 2y, x - y);$

(2) $\mathcal{A}(x, y) = (x + y, 2y)$. (2011年湖南师范大学)