国内部分重点高校硕士研究生入学考试高等代数试题
(线性方程组部分)

一. 填空题

1. 若矩阵方程$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ b & 2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$有解, 则$a+b=$________. (2012年北京工业大学)

2. 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & t & t \\ 1 & t & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 齐次线性方程组$Ax=0$的解空间的维数为2, 则$t=$________. (2015年北京工业大学)

3. 若n阶矩阵A的各行元素之和为零, 且$R(A)=n-1$, 则齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系为________. (2016年北京工业大学)

4. 已知线性方程组
$$\begin{cases} -x_1-x_2+3x_3=1+\lambda \\ -2x_1+x_2+2x_3=1 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda \end{cases}$$
无解, 则$\lambda=$________. (2016 年北京工业大学)

5. 一组齐次线性方程组
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$
无解, 则$a=$________. (2009 年北京交通大学)

6. 设A是5阶矩阵,A^*是A的伴随矩阵, 若η_1,η_2 是方程组$AX=0$的两个线性无关的解, 那么秩$r(A^*)=$________. (2016 年北京交通大学)

7. 已知方程组$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$有无穷解, 则$a=$________. (2011年北京科技大学)

8. 设3阶矩阵A的列分块矩阵为$1A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2)$, 若$\alpha_1,\alpha_2$ 线性无关, 且$\beta=2\alpha_1+\alpha_2$, 则线性方程组$AX=\beta$ 的通解为________. (2015 年大连理工大学)

9. 矩阵方程 $\begin{pmatrix} 1&1&0\\ 0&1&1\\ 0&0&1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2&1&1\\ 1&-1&1\\ 1&1&1 \end{pmatrix}$ 的解为______. (2010 年南京大学)

10. 设 n 级方阵 A 的每一行的和为0 且 A 的秩等于 $n-1$, 则齐次线性方程组 $AX=0$ 的通解为______. (2011年南京大学)

11. 已知 n 阶方阵 A 的秩 $\mathrm{r}(A)=n-2, \alpha_1=[1,2,3]^T, \alpha_2=[1,1,1]^T, \alpha_3=[2,3,2]^T$ 为非齐次线性方程组 $AX=b$ 的解, 则 $AX=b$ 的通解为______. (2010年上海大学)

12. 设 A 是 $m\times 4$ 矩阵,且 A 中有个三列向量线性无关, 如果线性方程组 $AX=b$ 有解 $\alpha=[1,2,3,4]^T$, $\beta=[1,1,1,1]^T$, 则 $AX=b$ 的通解是______. (2011 年上海大学)

13. 设 A 为 n 阶非可逆矩阵, 且 A^* 的第一列向量为 $\alpha\neq 0$, 如果线性方程组 $Ax=b$ 有解 β, 则线性方程组 $Ax=b$ 的通解为______. (2012年上海大学)

14. 设 A 是 $m\times 4$ 矩阵, 且 A 中有个三列向量线性无关, 如果线性方程组 $AX=b$ 有解 $\alpha=[1,2,3,4]^T$, $\beta=[1,1,1,1]^T$, 则 $AX=b$ 的通解是______. (2012年上海大学)

二. 选择题

1. 如果n阶方阵A的秩$R(A)=s$, 列向量$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$, $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'$, 齐次线性方程组$AX=0$ 与$\beta' X=1$有公共解, 则( ). (2009年北京工业大学)

   (A)$s>n$ (B)$s<n$

   (C)$s=n$ (D)无确定结论

2. 记A^*为n阶实方阵A的伴随矩阵. 如果齐次线性方程组$A^*X=0$的解空间的维数是$n-1$, 则$AX=0$的解空间的维数必然( ). (2009 年北京工业大学)

   (A)等于1 (B)等于$n-1$

   (C)不确定 (D)前三个选项都不正确

3. 记A^*为n阶实方阵A的伴随矩阵. 如果齐次线性方程组$A^*X=0$的解空间的维数是1, 则$AX=0$的解空间的维数必然( ). (2009年北京工业大学)

   (A)等于1 (B)等于$n-1$

   (C)不确定 (D)前三个选项都不正确

4. $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ a_{n+1,1} & \cdots & a_{n+1,n} & b_{n+1} \end{vmatrix} = 0$是满足条件$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \\ a_{n+1,1}x_1 + \cdots + a_{n+1,1}x_n = b_{n+1} \end{cases}$$

有解的(　). (2010年北京工业大学)

(A)必要条件　　(B)充分条件

(C)充分必要条件　　(D)以上三个选项都不正确

5. 若实系数方程组$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \\ a_3x + b_3y = c_3 \end{cases}$有解, 记$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$. 则(　). (2011年北京工业大学)

(A)$D > 0$　　(B)$D < 0$

(C)$D = 0$　　(D)D可以是任何实数

6. 若3维列向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \{\beta_1, \beta_2\}$作为列向量形成的矩阵$A = (alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (\beta_1, \beta_2)$满足$A = B\begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$, 则齐次线性方程组$AX = 0$的解的情况是(　). (2012年北京工业大学)

(A)有唯一解　　(B)无解

(C)有无穷多解　　(D)不确定, 依赖$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的具体情况

7. 设A是n阶方阵, 则下列选项中正确的是(　). (2017年北京工业大学)

(A)当齐次线性方程组$Ax = 0$有唯一解时, $|A| = 0$.　　(B)当齐次线性方程组$Ax = 0$有无穷多解时, $|A| = 0$.

(C)当$|A| = 0$时, 线性方程组$Ax = b$无解　　(D)当$|A| = 0$时, 线性方程组$Ax = b$有无穷多解

8. $a = 1$是齐次方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解的(　). (2016年北京交通大学)

(A)充分必要条件　　(B)充分非必要条件

(C)必要非充分条件　　(D)既非充分又非必要条件

9. 设A为n阶矩阵, α为n维列向量, 若秩$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}$=秩$A$, 则线性方程组(　). (2017 年北京交通大学)

(A)$AX=\alpha$必有无穷多解;

(B)$AX=\alpha$有唯一解;

(C)$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$仅有零解;

(D)$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$必有非零解.

10. 设三元非齐次线性方程组$Ax=b$的两个解为$\alpha=(1,0,2)'$, $\beta=(1,-1,3)'$, 且系数矩阵A 的秩为2, 则对与任意常数k,k_1,k_2, 方程的通解为(　). (2011 年北京科技大学)

(A)$k_1(1,0,2)'+k_2(1,-1,3)'$

(B)$(1,0,2)'+k(1,-1,3)'$

(C)$(1,0,2)'+k(2,-1,5)'$

(D)$(1,0,2)'+k(0,1,-1)'$

11. 设 A 为 n 阶方阵, 下列结论正确的有 (　)

A. A 的行向量组线性相关的充分必要条件是 $|A|=0$;

B. 线性方程组 $AX=b$ 有无穷多组解的充分必要条件是 $|A|=0$;

C. $|A^*|=0$ 的充分必要条件是 $|A|=0$;

D. 以上结论都正确.

三.计算题

1. 解方程组

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=14 \\ x^2y^2z+x^2yz^2+xy^2z^2=2 \end{cases}$$

(2009年北京大学)

2. 参数t取何整数时, 线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3+3x_4=1 \\ x_1+3x_2+2x_3-x_4=3t \\ x_1+x_2+2x_3+x_4=t^2 \end{cases}$$

有解? 写出相应情况下方程组的一般解. (2012年北京工业大学)

3. 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ 2x_1+(a+2)x_2+(a+1)x_3=a+3 \\ x_1+2x_2+ax_3=3 \end{cases}$$

有无穷多解; 设A是三阶矩阵, $\alpha_1 = (1,a,0)', \alpha_2 = (-a,1,0)', \alpha_3 = (0,0,a)'$ 分别为A的属于特征值$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -1$的特征向量.

(1)求所给线性方程组的通解;

(2)求矩阵A;

(3)求行列式$|A^* + 3E|$的值. (2014年北京工业大学)

4. 设线性方程组$AX = b$为4元非齐次线性方程组, 秩$(A) = 3$. 已知$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是方程的三个解向量, 且$\alpha_1 + \alpha_2 = (1,2,0,4)', \alpha_2 + \alpha_3 = (1,0,0,1)'$

(1)求该方程组相应导出组$AX = 0$的一个基础解系.

(2)求$AX = b$的通解. (2015年北京工业大学)

5. 问常数a, b各取何值时时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + (a+2)x_3 + 4x_4 = b + 3 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + (a+8)x_4 = 5 \end{cases}$$

无解, 有唯一解, 或有无穷多解, 并在无穷多解时写出其一般解. (2010年北京交通大学)

6. 问常数a, b各取何值时时, 以下方程组有解? 并求其解. (2011年北京交通大学)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = a \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = b \end{cases}$$

7. λ取何值时

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$$

有解? 并求其解. (2013年北京交通大学)

8. 问常数a, b各取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

无解, 有唯一解, 或有无穷多解, 并在无穷多解时写出其一般解. (2014年北京交通大学)

9. 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$$

有3个线性无关的解, 求a,b的值及方程组的通解. (2016 年北京交通大学)

10. 请给出方程组

$$\begin{cases} x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=a_1^3 \\ x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=a_2^3 \\ x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=a_3^3 \\ x_1+a_4x_2+a_4^2x_3=a_4^3 \end{cases}$$

无解的一个充要条件, 并且当: $\beta_1=(-1,1,1)^T,\beta_2=(1,1,-1)^T$ 为解时, 求全部解. (2017 年北京交通大学)

11. 已知方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ 2x_1+(a+2)x_2-(b+2)x_3=3 \\ -3ax_2+(a+2b)x_3=-3 \end{cases}$$

问: 当a,b取什么值时, 方程组无解? 有唯一解? 有无穷多解? 并在无穷多解时, 给出这个方程组的通解. (2009年北京科技大学)

12. 研究k取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} kx_1+x_2+x_3=5 \\ 3x_1+2x_2+kx_3=18-5k \\ x_2+2x_3=2 \end{cases}$$

(1)有唯一解;

(2)有无穷多解;

(3)无解. (2012年北京科技大学)

13. 求方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b \end{cases}$$

问常数a,b各取何值时时, 以下方程组有解? 并求其解. (2016年北京科技大学)

14. 设$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&s\\1&2&1&-1\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1\\0\\t\end{pmatrix}$, $\gamma_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\gamma_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$.

(1)已知数域P上的线性方程组$Ax=\beta$有解, 求s 和t需要满足的条件;

(2)当$s=0$时, 求P上的齐次线性方程组$AX=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$的基础解系;

(3)当$s=0,t=1$时, 给出$Ax=\beta$的两个线性无关的解;

(4)已知某齐次线性方程组的通解为$k_1\gamma_1+k_2\gamma_2, k_1,k_2\in P$, 求这个齐次线性方程组与(2)中方程组的所有公共解. (2011 年大连理工大学)

15. k取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases}kx+y+z=-2\\x+ky+z=k\\x++y+kz=k^2\end{cases}$$

(1)有唯一解;

(2)有无穷多解;

(3)无解. (2012年大连理工大学)

16. 已知两个齐次线性方程组:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0\\2x_1+3x_2+5x_3=0\\x_1+x_2+ax_3=0\end{cases}\text{与}\begin{cases}x_1+bx_2+cx_3=0\\2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0\end{cases}$$

同解, 求a,b,c. (2015年大连理工大学)

17. 设4元齐次线性方程组(I)为

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=0\\x_1+2x_2+x_3-x_4=0\end{cases}$$

已知另一个4元齐次线性方程组(II)的基础解系为$\alpha_1=(2,-1,a+2,1)', \alpha_2=(-1,2,4,a+8)'$.

(1)当齐次线性方程组(I)的一个基础解系;

(2)当a为何值时, 齐次线性方程组(I) 和(II)有非零公共解? 并求出全部的非零公共解(请给出必要的计算步骤). (2013年湖南大学)

18. λ取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases}(2\lambda+1)x_1-\lambda x_2+(\lambda+1)x_3=\lambda-1\\(\lambda-2)x_1+(\lambda-1)x_2+(\lambda-2)x_3=\lambda\\(2\lambda-1)x_1+(\lambda-1)x_2+(2\lambda-1)x_3=\lambda\end{cases}$$

有唯一解, 无解, 无穷多解? 并在无穷多解时写出其一般解. (2014年湖南大学)

19. 若方程

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = b_1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = b_2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = b_3 \end{cases}$$

对任意的数b_1, b_2, b_3都有解, 求λ 的值. (2009年湖南师范大学)

20. 设矩阵$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 其中$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 均为n维列向量, 且$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$线性无关, $\alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = \alpha_4$. 如果$\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4$, 试求线性方程组$AX = \beta$的通解. (2010年湖南大学)

21. 设V_1, V_2分别为齐次线性方程组

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

和

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

的解空间(作为$\mathbb{R}^4$的子空间).

(1)分别求出V_1和V_2的一组基;

(2)求出$V_1 \cap V_2$的一组基;

(3)求出$V_1 + V_2$的维数. (2015年湖南大学)

22. 解下列线性方程组

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 17 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 17 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 17 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 17 \end{cases}$$

. (2009年华东师范大学)

23. 设$\alpha_1 = (1, 2, -1, 0, 4), \alpha_2 = (-1, 3, 2, 4, 1), \alpha_3 = (2, 9, -1, 4, 13)$, $W = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 是由这三个向量生成的数域K上的线性空间K^5的子空间. (1)求以W作为解空间的齐次线性方程组;
(2)求以$W' = \{\eta + \alpha | \alpha \in W\}$为其解集的非齐次线性方程组, 其中$\eta = (1, 2, 1, 2, 1)$. (2011年华东师范大学)

24. 设K是数域, $W \in K^n$是K上的线性方程组$AX = B$的非空解集, 其中$A \in M_{m\times n}(K)$, $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $B \in M_{m\times 1}(K)$. 证明:

(1)存在该方程组的特解γ_0及K^n的子空间V, 使$W = \gamma_0 + V = \{\gamma_0 + \eta | \eta \in V\}$;

(2)若取$\gamma_0 = (2, 0, 1, 2)^T$, V是由$(2, 1, 0, 0)^T, (4, 0, -1, 0)^T, (1, 0, 0, 1)^T, (3, 0, -1, -1)^T$ 生成的K^n的子空间. 试求一线性方程组, 使其解集等于$\gamma_0 + V$. (2012年华东师范大学)

25. 当实数λ为何值时, 方程组

$$\begin{cases} (\lambda-2)x_1 - x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 + (\lambda-1)x_2 + 4x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

有唯一解, 无解, 有无穷多解; 有解时, 请求出全部解. (2017年华东师范大学)

26. 问实数a, d取何值时, 下列方程无解、有唯一解、有无穷多解? 有解时, 请求出所有解. (2018年华东师范大学)

$$\begin{cases} -x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5 = a - 3 \\ x_1 - x_3 - x_4 + (d-5)x_5 = -4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + (d+2)x_5 = -a \\ 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 12a_5 = -a + 6 \end{cases}$$

27. 当实数λ取何值时, 下列方程无解、有唯一解、有无穷多解? 有解时, 请求出所有解. (2019 年华东师范大学)

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ (\lambda^2+1)x_1 + 2\lambda x_2 + (\lambda+1)x_3 = \lambda + 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \\ 2x_1 + (\lambda+1)x_2 + (\lambda+1)x_3 = 2 \end{cases}$$

28. 当a, b为何值时, 下列线性方程组无解? 有唯一解? 有无穷多解? 当方程有解时, 写出其全部解. (2010年华南理工大学)

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + (a+3)y - 3z = 3 \\ -2x + (a-1)y + bz = -1 \end{cases}$$

29. 对λ的不同的值判断下列方程组是否有解, 有解时求出其全部解: (2012 年华南理工大学)

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda + 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 2 \end{cases}$$

30. 讨论参数a, b各取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + ax_3 + 7x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = b \end{cases}$$

有解? 无解? 并在有解的情况, 求出一般解. (2013 年华南理工大学)

31. 已知齐次线性方程组

$$\begin{cases}(a_1+b)x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0\\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+\cdots+a_nx_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_1x_1+a_2x_2+\cdots+(a_n+b)x_n=0\end{cases}$$

其中$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\neq 0$. 试讨论$a_1,a_2,\cdots,a_n,b$满足什么关系时,

(1)方程组仅有零解?

(2)方程组有非零解? 在有非零解时, 求此方程组的一个基础解系. (2014年华南理工大学)

32. 对λ的不同的值判断下列方程组是否有解? 当有解时求出其全部解: (2016年华南理工大学)

$$\begin{cases}(3-\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=\lambda\\ (2-\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=1\\ x_1+x_2+(2-\lambda)x_3=1\end{cases}$$

33. 设三元非齐次线性方程组$AX=b$的系数矩阵的秩$r(A)=1$, 这里A为三阶方阵, $X=(x_1,x_2,x_3)'$, $b=(b_1,b_2,b_3)'\neq 0$. 已知η_1,η_2,η_3是$AX=b$的三个解向量, $\eta_1+\eta_2=(1,2,3)'$, $\eta_2+\eta_3=(0,-1,1)'$, $\eta_3+\eta_1=(1,0,-1)'$, 求该方程组的基础解系. (2017年华南理工大学)

item设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_3=0\\ 2x_2+x_4=0\end{cases}$$

的解空间为W, 求: 向量$\alpha=(2,3,4,5)$在W 上的内射影以及α到W的距离.

(注: 由分解式$V=V_1\oplus V_1^{\perp}$, 对任意$\alpha\in V$有$\alpha=\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1\in V,\alpha_2\in V_1^{\perp}$, 称$\alpha_1$ 为向量α在子空间V_1上的内射影). (2019 年华南理工大学)

34. 求齐次线性方程组:

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3+x_4-x_5=0\\ x_1+x_2+x_4+x_5=0\\ x_1-3x_2+2x_3+x_4-3x_5=0\\ 3x_1+x_2+x_3+3x_4+x_5=0\end{cases}$$

的一组基础解系. (2011年华中科技大学)

35. 设齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2=0\\ x_2+x_4=0\end{cases}\qquad\text{(i)}$$

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ x_2+x_3-x_4=0\end{cases}\qquad\text{(ii)}$$

(1) 分别给出方程组(i) 与(ii) 的一个基础解系;

(2) 给出(i) 和(ii) 的全部公共解. (2012年华中科技大学)

36. 求下列齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_2+x_3+x_4+7x_5=0; \\ 2x_1+x_2+5x_3-x_4-x_5=0; \\ x_1-x_2+x_3+2x_4+x_5=0. \end{cases}$$

的一个基础解系, 并求该齐次线性方程组的通解. (2017年华中科技大学)

37. 设 α,β 都是实数域上的 n 维列向量,并且 $\alpha\neq 0$. 请构造一个 n 级方阵 A 使得 A 满足下面两个条件:

1. $A\alpha=\beta$,
2. 对于方程 $\alpha'X=0$ 的任意一个解 X 都有 $AX=X$. (2010年南京大学)

38. 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+3x_4+7x_5=4; \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0; \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3; \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2. \end{cases}$$

(2012年南京师范大学)

39. 在 P^4 中, 求由齐次线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-5x_3+4x_4=0; \\ 3x_1-x_2+3x_3-3x_4=0; \\ 3x_1+5x_2-13x_3+11x_4=0. \end{cases}$$

确定的解空间的基和维数. (2013年南京师范大学)

40. 若方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0; \\ 2x_1+3x_2+5x_3=0; \\ x_1+x_2+ax_3=0. \end{cases}$$

与

$$\begin{cases} x_1+bx_2+cx_3=0; \\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0. \end{cases}$$

同解, 求 a,b,c 的值.（2015年南京师范大学）

41. 讨论下面齐次线性方程组解的情况

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+\cdots+bx_n=0; \\ bx_1+ax_2+\cdots+bx_n=0; \\ \cdots\cdots\cdots \\ bx_1+bx_2+\cdots+ax_n=0. \end{cases}$$

. (2017年南京师范大学)

42. 求解矩阵方程

$$X\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&3\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}.$$

43. (20 分)已知$a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbb{C}$, 试求出线性方程组

$$\begin{cases}x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=a_1^3;\\x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=a_2^3;\\x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=a_3^3;\\x_1+a_4x_2+a_4^2x_3=a_4^3.\end{cases}$$

存在解的充要条件, 并在有解时求出其通解. (2012年南开大学)

44. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个互不相同的数, 证明下列方程组有唯一解, 并求解.

$$\begin{cases}x_1+a_1x_2+a_1^2x_3+\cdots+a_1^{n-1}x_n=-a_1^n;\\x_1+a_2x_2+a_2^2x_3+\cdots+a_2^{n-1}x_n=-a_2^n;\\\cdots\cdots\\x_1+a_nx_2+a_n^2x_3+\cdots+a_n^{n-1}x_n=-a_n^n.\end{cases}$$

. (2017年南开大学)

45. 已知方程组

$$\begin{cases}ax_1+bx_2+bx_3=1;\\bx_1+ax_2+bx_3=1;\\bx_1+bx_2+ax_3=1.\end{cases}$$

求 a,b 满足什么条件时, 方程组无解? a,b 满足什么条件时,方程组有解? 并在有解的情况的下求全部解. (2018年南开大学)

46. 已知

$$A=\begin{pmatrix}0&2&0&0&0\\1&-2&0&0&0\\0&0&-2&2&3\\0&0&1&0&4\\0&0&2&4&4\end{pmatrix}$$

且 $AX=-3X+I$, 求 X .

47. a,b 为何值时,下列方程组

$$\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=1\\2x_1+x_2+bx_3=3\\2x_1+x_2+3bx_3=1\end{cases}$$

无解, 有唯一解, 有无穷多解? 并在有无穷多解时写出方程组的通解. (2010年上海交通大学)

48. λ 为何值,下列方程组

$$\begin{cases}(\lambda+1)x_1+2x_2+3x_3=1\\ x_1+(\lambda+2)x_2+3x_3=1\\ x_1+2x_2+(\lambda+3)x_3=1\end{cases}$$

无解，有唯一解, 有无穷多解？并在有解时写出方程的解. (2011年上海交通大学)

49. 讨论线性方程组 $Ax=b$ 的可解性,其

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&1&3&-3\\3&2&c&-2\\4&3&5&a\end{pmatrix}.b=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

在有无穷多解时求通解(要求用向量形式表示). (2013年上海交通大学)

50. λ,μ 为何值时, 方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=4\\ x_1+\mu x_2+x_3=3\\ x_1+2\mu x_2+x_3=4\end{cases}$$

有唯一解？无解？有无穷解？无穷解时并求其全部解. (2015 年上海交通大学)

51. $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是一个 n 阶可逆矩阵, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 记 $B=(A_{ij})_{r\times n}(r\leq n)$, 求 $BX=0$ 的基础解系. (2018年上海交通大学)

52. 解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2-5x_3+x_4+6x_5=8\\ x_1-3x_2-6x_4+4x_5=9\\ 2x_2-x_3+2x_4-x_5=-5\\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4+4x_5=0\\ 3x_1-6x_3-3x_4+9x_5=12\\ 2x_1+3x_2-8x_3+2x_4+7x_5=4\end{cases}$$

(2011年首都师范大学)

53. 求方程组

$$\begin{cases}4x+y+11z=-5\\ -x+8y+10z=5\end{cases}$$

的通解. (2012年首都师范大学)

54. 求下列100 个变元的方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\ x_2-x_3+x_4=0\\ x_3-x_4+x_5=0\\ \vdots\\ x_{98}-x_{99}+x_{100}=0\\ x_{99}-x_{100}+1=0\end{cases}$$

的通解. (2014年首都师范大学)

55. 讨论下面线性方程组有解的条件，并写出一般解.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=a_1 \\ x_2+x_3+x_4=a_2 \\ x_3+x_4+x_5=a_3 \\ x_4+x_5+x_6=a_4 \\ x_5+x_6+x_7=a_5 \\ x_6+x_7+x_8=a_6 \\ x_7+x_8+x_9=a_7 \\ x_8+x_9+x_{10}=a_8 \\ x_9+x_{10}+x_2=a_9 \end{cases}$$

(2017年首都师范大学)

56. 设线性方程组 $AX=b(b\neq 0)$ 的解向量中有一组极大线性无关向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$. 令 V 为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 生成的向量空间, 给出 V 中向量是 $AX=b$ 的解的充要条件. (2017年首都师范大学)

57. 已知非齐次线性方程组

$$(I):\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1; \\ 3x_1+2x_2+4x_3-x_4=0; \\ 5x_1+3x_2+7x_3-3x_4=1; \\ ax_1+x_2+5x_3+bx_4=3. \end{cases}$$

有三个线性无关的解.

（1）记方程组(I) 的系数矩阵为A，证明：$r(A)=2$；

（2）求a，b的值;

（3）求方程组(I) 的通解. (2010年武汉大学)

58. 设n元线性方程组$Ax=b$，其中

$$r\begin{pmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a \end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1.证明行列式$|A|=(n+1)a^n$；

2.当a为何值时，该方程组有唯一解，并求x_1；

3.当a为何值时，该方程组有无穷多组解，并求通解. (2011年武汉大学)

59. 求方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3+4x_4=5;\\4x_1-2x_2+5x_3+6x_4=7;\\6x_1-3x_2+7x_3+8x_4=9;\\\lambda x_1-4x_2+9x_3+10x_4=11.\end{cases}$$

依赖参数λ 的通解. (2012年武汉大学)

60. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性方程组

$$\begin{cases}x-3y+z=2;\\2x+y+tz=-1;\\7x-2z=-1.\end{cases}$$

的三个互不相同的解向量.

1.试求参数t的值;

2.证明：$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3$ 线性相关. (2013年武汉大学)

61. 考虑齐次线性方程组$AX=0$ ，其中$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)',A=(a_{ij})_{n\times n},a_{ii}=a,a_{ij}=b(i\neq j),i,j=1,2,\cdots,n,n\geq 2$ ，a和b不同时为0.试讨论当a，b为何值时，方程组仅有零解，有无穷多组非零解？并求出全部解. (2011年湘潭大学)

62. 设齐次线性方程组

$$\begin{cases}(a+b)x_1+bx_2+\cdots+bx_n=0;\\2bx_1+(a+2b)x_2+\cdots+2bx_n=0;\\\vdots\\nbx_1+nbx_2+\cdots+(a+nb)x_n=0.\end{cases}$$

试讨论a，b为何值时，方程组只有零解，有非零解？在有非零解时，求出其通解. (2012年湘潭大学)

63. 设四元齐次方程组(I) 为

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=0;\\x_1+2x_2+x_3-x_4=0.\end{cases}$$

并已知另一组四元齐次线性方程组(II) 的基础解系为

$$\eta_1=(2,-1,y+2,1)',\eta_2=(1,2,4,y+8)'.$$

（1）求方程组(I) 的全部解.

（2）求y为何值时，两个方程组有公共的非零解. (2018年湘潭大学)

64. 已知线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=1\\x_1+3x_2+6x_3+x_4=3\\3x_1-x_2-ax_3+15x_4=3\\x_1-5x_2-10x_3+12x_4=b\end{cases}$$

问a,b 取何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？在方程组有无穷多解时，求其通解. (2010年云南大学)

65. 设线性方程组

$$\begin{cases} a^2x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+ax_2+x_3=a \\ x_1+x_2+x_3=a^2 \end{cases}$$

有解，求实数a的取值范围. (2012年中科大)

66. 矩阵$A=(a_{ij})_{n-1\times n}$ 的$n-1$ 阶子式不全为零,给出齐次方程组$Ax=0$ 的一组解,并求出方程的所有解. (2016年国科大)

四.证明题

1. A,B是n阶矩阵, 且满足$A=(B-\frac{1}{110}E)^{'}(B+\frac{1}{110}E)$, 证明: 对任意的$n$维列向量$\xi$, 方程组

$$A^{'}(A^2+A)X=A^{'}\xi$$

必有非零解. (2010年北京大学)

2. 设$A=(a_{ij})_{m\times n}$是实$m\times n$矩阵, β是实m维列向量. 证明: 线性方程组$(A^{'}A)X=A^{'}\beta$总是有实数解的. (2009年北京工业大学)

3. 设n元线性方程组$AX=b$, 其中

$$A=\begin{pmatrix} 2a & a^2 & & \\ 1 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & a^2 \\ & & 1 & 2a \end{pmatrix}_{n\times n}, X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1)证明: $|A|=(n+1)a^n$;

(2)根据a取值讨论方程组解的情况; 若有解, 求出所有解X; 若无解, 请说明理由. (2013 年北京工业大学)

4. 设$m\times n$矩阵A的秩为r, 考虑线性方程组$Ax=b(b\neq 0)$.

(1)设$Ax=b$有特解α_0, 它的导出组$Ax=b$的一组基础解系为$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$, 证明: $\alpha_0,\alpha_0+\eta_1,\alpha_0+\eta_2,\cdots,,\alpha_0+\eta_{n-r}$ 线性无关;

(2)设$\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 是$Ax=b$的$n-r+1$ 个线性无关的解向量, 证明: $\alpha_1-\alpha_0,\alpha_2-\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-r}-\alpha_0$ 是导出组$Ax=b$的一组基础解系. (2016年北京工业大学)

5. 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

为线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1,1}x_1+a_{n-1,2}x_2+\cdots+a_{n-1,n}x_n=0 \end{cases}$$

的系数矩阵. 设$M_j(j=1,2,\cdots,n)$是将A去掉第j列所得的$n-1$阶子式.

求证:

(1)$(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)$是线性方程组的一个解;

(2)若A的秩为$n-1$, 那么方程组的解都是$(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)$的倍数. (2017 年北京交通大学)

6. 设η^*是非齐次线性方程组$Ax=b$的一个解, $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$是对应的齐次线性方程组$Ax=0$ 的一个基础解系, 证明:

   (1)$\eta^*,\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关;

   (2)$\eta^*,\eta^*+\xi_1,\cdots,\eta^*+\xi_{n-r}$ 是线性方程组$Ax=b$的$n-r+1$ 个线性无关的解. (2014 年北京科技大学)

7. 证明:已知$A=(a_{ij})_{m\times n}$, $Ax=\beta$有解的充分必要条件是对于方程组$A'y=0$的每一组解c都有$\beta'c=0$. (2009年大连理工大学)

8. 证明: $\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i=0$与$\sum\limits_{i=1}^{n}b_ix_i=0$同解的充分必要条件是系数对应成比例. (2009年大连理工大学)

9. 已知数域P上的非齐次线性方程组$Ax=\beta$有解, 其中A,β分别是$m\times n$ 和$m\times n1$型矩阵, 求证: 每个解向量的第k个分量都等于零的充分必要条件是将增广矩阵(A,β)的第k列划去之后得到的矩阵的秩比(A,β) 的秩小. (2011年大连理工大学)

10.)设η_0某非齐次线性方程组的一个特解, $\eta_1,\cdots,\eta_t$是其导出组的一个基础解系, 证明向量组$\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_t$线性无关. (2015年大连理工大学)

11. 设$A\in\mathbb{R}^{s\times n}$, 证明:

    (1)$r(A'A)=r(A)$;

    (2)对任意的$\beta\in\mathbb{R}^{s\times 1}$, 线性方程组$A'AX=A'\beta$ 有解. (2018年大连理工大学)

12. 设A,B均为n阶方阵, 证明:

    (1)矩阵AB的秩等于矩阵B的秩的充要条件是方程组$ABx=0$和$Bx=0$同解;

    (2)$r(A^n)=r(A^{n+1})$. (2009年湖南工大学)

13. 设A是$m\times n$阶实矩阵, $r(A)$为矩阵A 的秩, 证明:

(1)$r(A)=r(A^{'}A)$;

(2)对任意的m维实向量b, 线性方程组$A^{'}Ax=A^{'}b$必有解. (2012 年湖南大学)

14. 证明:线性方程组:

$$AX=\beta$$

(A为n阶方阵)对任意n维列向量β都有解的充要条件是A可逆; (2009年湖南师范大学)

15. 设β_0是线性方程组$AX=b$的一个解向量, 其中$b\neq 0$, 而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 是$AX=0$的一个基础解系, 证明:

(1)

$$\beta_0,\beta_1=\beta_0+\alpha_1,\beta_2=\beta_0+\alpha_2,\cdots,\beta_{n-r}=\beta_0+\alpha_{n-r}$$

是方程$AX=b$的$n-r+1$个线性无关的解向量;

(2)$AX=b$的任意解向量β可表示为:

$$\beta=k_0\beta_0+k_1\beta_1+\cdots+k_{n-r}\beta_{n-r},$$

其中$\sum\limits_{i=0}^{n-r}k_i=1$. (2010年湖南师范大学)

16. (15分)设S是数域K上某n元的非齐次线性方程组$(*)$的非空解集, 且$(*)$ 的增广矩阵的秩为r. 证明:

(1)如果$r_0,r_1,\cdots,r_{n-r}$是S的一组线性无关的向量, 则$s\leq n-r$;

(2) S中存在线性无关的向量组$r_0,r_1,\cdots,r_{n-r}$;

(3)假设$r_0,r_1,\cdots,r_{n-r}$是S中任意一组线性无关的向量, 则$\forall\gamma\in S$, 存在$r_0,r_1,\cdots,r_{n-r}$,且$\sum\limits_{i=0}^{n-r}k_i=1$, 使$\gamma=\sum\limits_{i=0}^{n-r}k_i\gamma_i$. (2009年华东师范大学)

17. 设矩阵$A=(a_{ij})\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B=(b_1,\cdots,b_m)^T\in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$. 证明: 线性方程组$A^TAX=A^TB$一定有解. (2014年华东师范大学)

18. 设A,B是数域P上的n阶方阵, $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n^{'})$, 已知齐次线性方程组$AX=0$和$BX=0$分别有$l,m$个线性无关的解向量, 这里$l\geq 0,m\geq 0$. 证明:

(l)方程组$(AB)X=0$至少有$\max\{l,m\}$个线性无关的解向量;

(2)若$l+m>n$, 则$(A+B)X=0$必有非零解;

(3)如果$AX=0$和$BX=0$无公共的非零解向量, 且$l+m=n$, 则P^n中任一向量α都可唯一地表示成$\alpha=\beta+\gamma$这里β,γ分别是$AX=0$和$BX=0$的解向量. (2011 年华南理工大学)

19. 已知 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系, 向量 $\beta_1,\cdots,\beta_k$ 都是 $AX=0$ 的解. 令矩阵

$$S=(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)\,,T=(\beta_1,\cdots,\beta_k)$$

证明如下结论:

(1) 存在 k 阶方阵 C ,使得 $T=SC$.

(2) $\beta_1,\cdots,\beta_k$ 也是 $AX=0$ 的基础解系的充分必要条件是 C 可逆. (2009年华中科技大学)

20. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为一组基,证明 $\forall b_1,b_2,\cdots,b_n$ 存在唯一的 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$, 使得

$$(\beta_i,\alpha_i)=b_i$$

(2016年华中科技大学)

21. 已知 A 是一个 $m\times n$ 的矩阵, 试证明 $r(A)=r$ 的充分必要条件是

$$A=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_r\beta_r$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 r 个 m 维的线性无关的向量, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 是 r 个 m 维的线性无关的问量. (2019年华中科技大学)

22. 设 A 是秩为 r 的 $m\times n$ 阶矩阵, B 是非零的 $m\times 1$ 阶矩阵. 考虑线性方程组 $AX=B$, 其中 X 是变元 $x_1,\cdots,x_n$ 的列向量. 证明:

(1) 线性方程组 $AX=B$ 的任意有限个解向量 $X_1,\cdots,X_k$ 的向量组的秩 $\leqslant n-r+1$.

(2) 若线性方程组 $AX=B$ 有解, 则它有 $n-r+1$ 个解向量是线性无关的. (2009年华中师范大学)

23. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 是两个向量组. 证明: 如果

(1)向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可以由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示,

(2) $r>s$ 那么向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 必线性相关.（2011年兰州大学）

24. 设 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解. 证明:它有基础解系,并且基础解系含解的个数等于 $n-r$ 其中 r 表示系数矩阵 A 的秩.（2014年兰州大学）

25. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 n 维欧式空间 V 中的一组向量,

$$\Delta=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_m)\\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_m)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (\alpha_m,\alpha_1) & (\alpha_m,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_m,\alpha_m)\end{pmatrix}$$

证明: $\alpha_1,\alpha_2\quad\alpha_m$ 线性无关当且仅当 $|\Delta|\neq 0$.

26. 设 n 级方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 的前 $n-1$ 个列向量线性相关, 后 $n-1$ 个列向量线性无关, $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$.

1. 证明: 方程组 $AX=\beta$ 必有无穷多解.
2. 求方程组 $AX=\beta$ 的通解.

27. 设 n 级行列式 $D_n=|a_{ij}|\neq 0, A_{ij}$ 为 D_n 中元素 a_{ij} 的代数余子式, 证明: 当 $r<n$ 时, 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0; \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0. \end{cases}$$

有一个基础解系为: $(A_{j1},A_{j2},\cdots,A_{jn})$, $\quad j=r+1,r+2,\cdots,n$.（2010 年南京师范大学）

28. 证明数域 P 上的线性方程组 $Ax=b$ 有解的充要条件是

$$\begin{cases} A'y=0 \\ b'y=1 \end{cases}$$

无解, 其中 $A\in P^{m\times n}, b\in P^m, A'$ 和 b' 分别表示 A 和 b 的转置, $x\in P^n$ 和 $y\in P^m$ 是未知量.（2016 年南京师范大学）

29. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 为 n 阶方阵,且 $r\left(A_1A_2\cdots A_m\right)=r\left(A_m\right)$,证明: 对任意的 $1\leq i,k\leq m$, 方程组 $A_iA_{i+1}\cdots A_mX=0$ 与方程组 $A_kA_{k+1}\cdots A_mX=0$ 同解.

30. 设 $A=(a_{i,j})_{n\times n}, B=(b_{ij})_{n\times n}$ 为 $P^{n\times n}$ 上的 n 级矩阵, 满足条件 $b_{ij}=b^{i-j}a_{ij}$, 其中 b 为一非零常数, 线性方程组(I): $AX=C$ 及 (II) : $BX=D$. 证明: 方程组 (I) 对任何 $C\in P^{n\times 1}$ 有解当且仅当方程组(II) 对任何 $D\in P^{n\times 1}$ 有解. (2009年南开大学)

31. $\mathbb{F}$ 上齐次方程组 $X_{1\times n}A_{n\times m}=O_{1\times m}(*)$, 令 $C=\begin{pmatrix} A_{n\times m} & I_n \end{pmatrix}$, 对 C 做一系列的初等变换化为 $\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} D_r \\ 0 \end{pmatrix} & P \end{pmatrix}$, 其中 D_r 为一行满秩, $r=\mathrm{r}(A), P$ 为 n 阶可逆方阵. 证明: P 的最后 $n-r$ 行即为方程组(*) 的一个基础解系.

32. 设 $A=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ 为数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶矩阵, A_1,A_2 分别为 $k\times n,(n-k)\times n$ 矩阵, $A_1X=0$ 的解空间为 V_1, $A_2X=0$ 的解空间 V_2, 证明

$$\mathbb{F}^n=V_1\oplus V_2\Leftrightarrow r(A)=r\left(A_1\right)+r\left(A_2\right)$$

.

33. $\mathbb{F}$ 上齐次方程组 $X_{1\times n}A_{n\times m}=O_{1\times m}(*)$, 令 $C=\begin{pmatrix} A_{n\times m} & I_n \end{pmatrix}$, 对 C 做一系列的初等变换化为 $\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} D_r \\ 0 \end{pmatrix} & P \end{pmatrix}$, 其中 D_r 为一行满秩, $r=\mathrm{r}(A), P$ 为 n 阶可逆方阵. 证明: P 的最后 $n-r$ 行即为方程组(*)的一个基础解系. (2009年上海大学)

34. 设 $A \neq 0$ 是 $m \times n$ 矩阵, $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_m)'$, 证明线性方程组 $AX = \beta$ 有解的充要条件是：齐次线性方程组 $A'Y = 0$ 的每一个解 $v = (v_1, v_2, \cdots, v_m)'$ 都满足 $v'\beta = 0$, 即 β 与 $A'Y = 0$ 的解空间正交. (2013 年上海交通大学)

35. 设 n 级方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 的前 $n-1$ 个列向量线性相关, 后 $n-1$ 个向量线性无关, $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.

(1) 证明: 方程组 $AX = \beta$ 必有无穷多解.

(2) 求方程组 $AX = \beta$ 的通解. (2014年上海交通大学)

36. 设 $m < n$ 以及 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 为 m 个线性无关的 n 维向量. 证明: 存在一个 n 元齐次线性方程组, 使 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是它的一个基础解系. (2019年上海交通大学)

37. 设 A, B 是数域 P 上的 n 阶方阵, $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$. 若齐次线性方程组 $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 分别有 l, m 个线性无关的解向量. 证明:

1. $ABX = 0$ 至少有 $\max\{l, m\}$ 个线性无关的解向量.

2. 若 $l + m > n$, 则 $(A + B)X = 0$ 有非零解. (2019年上海交通大学)

38. 证明：线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

有解的充要条件是方程组的系数矩阵与增广矩阵具有相同的秩. (2009年首都师范大学)

39. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, β 是 m 维列向量, 证明: 方程组 $AX = \beta$ 有解当且仅当方程组 $A'Y = 0$ 的解都是方程 $\beta'Y = 0$ 的解 (A' 为A 的转置矩阵) . (2012 年首都师范大学)

40. 设$AX = \beta$ 是数域$\mathbb{F}$ 上的一个n元线性方程组，其系数矩阵A的秩$r(A) = r$.设S为它的解集.

（1）给出“S是$\mathbb{F}^n$ 的子空间”的充分必要条件，并证明你的结论.

（2）假设S不是空集且不是$\mathbb{F}^n$ 的子空间.求S的秩，并给出它的一个极大无关组. (2010年四川大学)

41. 设A是数域F上的$m \times n$ 型矩阵.

（1）问：A应该满足什么条件，使得对任意$\beta \in F^m$ ，线性方程组$AX = \beta$ 都有解？说明理由.

（2）设$F = \mathbb{R}$ 是实数域. 证明：对任意m维实向量β ，线性方程组$A'AX = A'\beta$ 都有解，其中，A' 表示A的转置. (2012年四川大学)

42. 设A是n阶复方阵.设α_i 是A的第i个列向量；A_i 是A划去第i列得到的矩阵$(1 \leq i \leq n)$.证明：A不可逆当且仅当存在j使得方程组$A_jX = \alpha_j$ 有解.(2014年四川大学)

43. 设A，B是数域F上的$m \times n$ 型矩阵.

（1）证明：齐次线性方程组$AX = 0$ 与$BX = 0$ 同解的充分必要条件是A的行向量组与B的行向量组等价，即A的每个行向量都可由B的行向量组线性表出，且B的每个行向量都可由A的行向量组线性表出.

（2）举例说明：当A的列向量组与B的列向量组等价时，齐次线性方程组$AX = 0$ 与$BX = 0$ 可以不同解.

（3）设$B \neq 0$ 且矩阵方程$AY = B$ 有解，其解集记为W.证明：存在F上的n阶方阵$Y_1, Y_2, \cdots, Y_s$ 使得对任意$Y \in W$ 都有$Y = \sum\limits_{i=1}^{s} a_i Y_i$ 且$\sum\limits_{i=1}^{s} a_i = 1$.(2016年四川大学)

44. 设$AX = \beta$ 是4元线性方程组，A的秩为2.已知$AX = \beta$ 有四个解$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ，且满足：

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = (1, 5, 4, -15)'; \\ \alpha_2 + \alpha_3 = (1, 4, 3, -13)'; \\ 2\alpha_3 - \alpha_4 = (2, 3, 0, -3)'. \end{cases}$$

其中，$(a, b, c, d)'$表示行向量的转置.求$AX = \beta$ 的通解. (2017年四川大学)

45. 设数域F上的$m \times n$ 型矩阵M和$p \times q$ 型矩阵N的秩分别为n，p.证明：矩阵方程$MYN = 0$ 只有零解$Y = 0$.(2017年四川大学)

46. 设$AX = \beta$ 是数域F上的非齐次线性方程组.

（1）设$AX = \beta$ 有无穷多个解，证明：存在它的解$r_1, r_2, \cdots, r_s$ ，使得它的任意解都是$r_1, r_2, \cdots, r_s$ 的线性组合.

（2）设$AX = \beta$ 有无穷多个解，且它的任意解都可以由向量组$(1, -1, 0, 4)', (0, 3, 7, 2)', (3, 0, 7, 14)'$ 线性表出.求矩阵A的秩$r(A)$.

（3）设矩阵A的秩为$r(A) = 3$ ，已知$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是$AX = \beta$ 的两两不同的解且满足：

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = (3, 0, 0, 0)', 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = (5, 2, 2, 0)'.$$

求$AX = \beta$ 的通解. (2018年四川大学)

47. 设A是数域F上的$s \times n$ 型实矩阵.设$F = \mathbb{R}$ 是实数域，证明：$r(A'A) = r(A)$ ，并由此证明：对$\forall \beta \in \mathbb{R}^n$ ，线性方程组$A'AX = A'\beta$ 都有解. (2019年四川大学)

48. 设$b \neq 0, r(A) = r(A, b) = r, Ax = b$ 的所有解集合为S，证明：

1.S中包含$n - r + 1$ 个线性无关的向量$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r+1}$ ；

2.ξ 是S中元素的充要条件是存在$k_i, (i = 1, 2, \cdots, n-r+1)$, $\sum\limits_{i=1}^{n-r+1} k_i = 1$ ，使得$\xi = \sum\limits_{i=1}^{n-r+1} k_i \eta_i$.(2015年武汉大学)

49. 设A是$m\times n$ 矩阵，$r(A)=m$ ，齐次线性方程组$Ax=0$ 的一个基础解系为$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-m}$ ，其中$\beta_i=(b_{1i},b_{2i},\cdots,b_{ni})',(i=1,2,\cdots,n-m)$.求齐次线性方程组$\sum\limits_{j-1}^{n}b_{ji}y_j=0,i=1,c,\cdots,n-m$ 的一个基础解系. (2017年武汉大学)

50. 设齐次线性方程组$x_1+2x_2+\cdots+nx_n=0$ 与$x_1=x_2=\cdots=x_n$ 的解空间分别为V_1 和V_2 .证明：

$$\mathbb{C}^n=V_1\bigoplus V_2.$$

(2013年湘潭大学)

51. 令向量$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),i=1,2,\cdots,s$ 及$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ ，证明：线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0;\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0;\\\vdots\\a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0.\end{cases}$$

的解全是方程$b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$ 的解当且仅当β 可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示. (2014年湘潭大学)

52. 方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2=a_1;\\x_2-x_3=a_2\quad\cdots\\x_n-x_1=a_n.\end{cases}$$

有解的充要条件是什么？并解方程组（用导出组基础解系来表示）. (2017年云南大学)

53. 设为η_1,η_2,η_3 的基础解系，A为3行5列实矩阵.求证：存在$\mathbb{R}^5$ 的一组基，其包含$\eta_1+\eta_2+\eta_3,\eta_1-\eta_2+\eta_3,\eta_1+2\eta_2+4\eta_3$.(2014年浙江大学)

54. 矩阵A，B均为$m\times n$ 矩阵，$AX=0$ 与$BX=0$ 同解，求证A,B 等价.若A，B等价，是否有$AX=0$ 与$BX=0$ 同解？证明或举反例否定. (2014年浙江大学)

55. $\exists b\neq 0,Ax=b$ ，证明：$A^*x=b$ 有解的充要条件为

$$r(A)=n-1.$$

(2015年浙江大学)

56. 已知A,B 为$m\times n$ 矩阵，$R(A),R(B)$ 分别为A,B 的行向量生成的线性空间，且$r(A)=r,r(B)=s$ ，齐次线性方程组$AX=0$ 和$BX=0$ 的公共解空间为W，证明

（1）若$r+s<n$ ，则W有非零元.

（2）若$dimW=n-r-s$ ，则$R(A)\cap R(B)=\{0\}$.(2017年浙江大学)

57. 设数域K上的n阶方阵A满足$A^2 = A$,而V_1, V_2 分别是齐次线性方程组$Ax = 0$ 和$(A - I_n)x = 0$ 在K^n 中的解空间,证明:$K^n = V_1 \oplus V_2$,其中I_n 代表n阶单位矩阵. (2012年国科大)

58. 设A, B 是两个$m \times n$ 矩阵,且$AX = 0$ 与$BX = 0$ 同解.证明A与B的行向量组等价. (2012年中南大学)

59. 设A, B 分别是$m \times n$ 和$n \times m$ 矩阵,满足$ABA = A$,b是一个m维列向量.证明:方程$AX = b$ 有解的充要条件是

$$ABb = b,$$

且在有解时,通解为

$$X = Bb + (E_n - BA)Y,$$

其中E_n 为n阶单位矩阵,Y为任意n维列向量. (2013年中南大学)

60. 已知A为n阶方阵,$A(i, j) = a_i - b_j$.

(1)求$|A|$.

(2)若$a_1 \neq a_2, b_1 \neq b_2$,求$AX = 0$ 的通解. (2017年中南大学)

61. 已知A为n阶方阵,$r(A) = r$,证明:非齐次线性方程组

$$AX = \beta$$

有$n - r + 1$ 个线性无关的解. (2017年中南大学)

62. 设$A \in F^{m \times n}$.若对任意n维向量$b \in F^n$,线性方程组$AX = b$ 有解.证明:

$$r(A) = m.$$

(2013年中山大学)

63. 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & h & -g \\ -b & -h & 0 & f \\ -c & g & -f & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

(1)计算A的行列式值;

(2)设$\lambda \in \mathbb{R}$,证明:线性方程组$(\lambda I + A)X = 0$ 有解的充要条件是$\lambda = af + bg + ch = 0$.(2016年中山大学)