国内部分重点高校硕士研究生入学考试高等代数试题
(线性空间部分)

厦门大学《高等代数》

一. 填空题

1. 如果4维向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 和$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 满足$\begin{cases}\alpha_1=3\beta_1+\beta_2-\beta_3\\ \alpha_2=2\beta_1-\beta_2+\beta_3\\ \alpha_3=3\beta_1+2\beta_2+\beta_3\\ \alpha_4=\beta_1-\beta_2-\beta_3\end{cases}$, 则行列式$|\alpha_1,2\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_4|=$________.
   (2009 年北京工业大学)

2. 如果四维向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 和$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 满足$\begin{cases}\alpha_1=3\beta_1+\beta_2-\beta_3\\ \alpha_2=2\beta_1-5\beta_2+\beta_3\\ \alpha_3=\beta_1+2\beta_2+\beta_3\\ \alpha_4=\beta_1-\beta_2-7\beta_3\end{cases}$, 则矩阵$(\alpha_1-3\alpha_4,2\alpha_2,alpha_3,\alpha_4)$ 的秩$R(\alpha_1-3\alpha_4,2\alpha_2,alpha_3,\alpha_4)$______4.(填比较关系) (2010年北京工业大学)

3. 设V是实数域R上的n维线性空间.记L_v为V的全体线性变换构成的集合. 若定义$(\mathscr{A}+\mathscr{B})(v)=\mathscr{A}(v)+\mathscr{B}(v)$, $(r\mathscr{A})(v)=r\mathscr{A}(v)$, 其中$\mathscr{A},\mathscr{B}\in L_v$, $r\in R$, $v\in V$, 则装配上这两种运算的L_v形成一个______维线性空间. (2010年北京工业大学)

4. 所有形如$\begin{pmatrix}u&v&w\\x&u&v\\y&x&u\end{pmatrix}$的实矩阵形成的集合$T_3=\{\begin{pmatrix}u&v&w\\x&u&v\\y&x&u\end{pmatrix}|x,y,u,v,w$都是实数$\}$ 关于矩阵的乘法形成一个线性空间. 此空间的维数是________. (2012年北京工业大学)

5. 设R为实数域, 集合$T=\{\begin{pmatrix}u&v&u\\v&x+y&x\\u&x&u\end{pmatrix}|u,v,x,y\in R\}$ 关于矩阵的加法和数乘构成$R-$线性空间. 则T的一组基为______, 维数是______. (2013年北京工业大学)

6. 设$A=\{\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $T=B|AB=BA$, 其中B为三阶实方阵, T关于矩阵加法和数乘构成$R-$ 线性空间. 则T的一组基为______, 维数是______. (2014年北京工业大学)

7. 设$\mathbb{R}$为实数域, 集合$V=A\in\mathbb{R}^{n\times n}:A'=A$关于矩阵加法和数乘构成一个实线性空间. 则$dimV=$______.
   (2016年北京工业大学)

8. 将复数域看成它自身的线性空间, 它的维数是________. (2017年北京工业大学)

9. 设向量$\alpha=(1,2,-1,1)$, $\beta=(2,1,0,4)$, $\gamma=(4,5,-2,t)$线性相关, 则$t=$________. (2017年北京工业大学)

10. 设$\alpha_1=(1,1,1,2)^T$, $\alpha_2=(4,6,2a+7,10)^T$, $\alpha_3=(3,a+4,2a+5,a+7)^T$, $\beta=(2,3,2a+3,5)^T$, 若β不能用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示, 则$a=$________. (2009年北京交通大学)

11. 设线性空间$\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}|a,b$为任意有理数$\}$, 则其基和维数分别是________. (2010年北京交通大学)

12. 设向量组$\alpha_1=(1,2,1,3)$, $\alpha_2=(1,1,-1,1)$, $\alpha_3=(1,3,3,5)$, $\alpha_4=(4,5,-2,6)$, $\alpha_5=(-3,-5,-1,-7)$, 则其秩为________. (2010年北京交通大学)

13. 设$\mathbb{R}[x]_3$是次数小于3的所有实系数多项式组成的线性空间, 取其两个基:

$$\mathrm{I}:\alpha_1=1,\alpha_2=1+x,\alpha_3=1+x+x^2;\ \mathrm{II}:\beta_1=1+x^2,\beta_2=x+x^2,\beta_3=1+x+x^2.$$

则基I到基II的过渡矩阵为________. (2010年北京交通大学)

14. 设$W=\{(a_{ij})\in P^{4\times4}|a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34}=0,a_{41}+a_{42}+a_{43}+a_{44}=0\}$, 则$W$是$P^{4\times4}$的子空间, $dim(W)=$________. (2011 年北京交通大学)

15. 若向量组$\alpha_1=(1,0,1),\alpha_2=(a,-1,0),\alpha_3=(-1,a,-1)$ 的秩是2, 则$a=$________. (2012年北京交通大学)

16. 设数域上P上次数小于n的所有多项式构成的线性空间为$P[x]_n$, 若$f(x)\in P[x]_n$. 则$f(x)$在$P[x]_n$ 的一组基为$1,x-a,(x-a)^2,\cdots,(x-a)^{n-1}$下的坐标为________. (2013年北京交通大学)

17. 设$A=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix},W=\{B|BA=AB,B\in\mathbb{R}^{2\times2}\}$ 则______是W的一组基. (2015年北京交通大学)

18. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关, 当$t$满足______时, $\alpha_1+t\alpha_2,\alpha_2+t\alpha_3,\alpha_3+t\alpha_1$ 也线性无关. (2017年北京交通大学)

19. 设V为数域F上的一切n阶对称矩阵所构成的向量空间, 则$dimV=$________. (2017年北京交通大学)

20. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\omega&0\\0&0&\omega^2\end{pmatrix}$, $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, 设$V=\{f(A)|f(x)\in\mathbb{R}[x]\}$, $dimV=$______, V的一组基为______. (2011 年北京交通大学)

21. 从R^3的基$\alpha_1=(1,0,1)'$, $\alpha_2=(1,1,-1)'$, $\alpha_3=(0,1,0)'$到基$\beta_1=(1,-2,1)'$, $\beta_2=(1,2,-1)'$, $\beta_3=(0,1,-2)'$的过渡矩阵$P=$________. (2011年北京科技大学)

厦门大学《高等代数》

22. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关, 当$t$满足________时, $\alpha_1+t\alpha_2,\alpha_2+t\alpha_3,\alpha_3+t\alpha_1$ 也线性无关. (2012年湖南师范大学)

23. 设$P[x]_4$是数域P上的所有次数不大于3的多项式以及零多项式所组成的线性空间. 已知$1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3$是一组基, 则$P[x]_4$中元素$2+x+x^3$关于该基的坐标是________. (2014年湖南师范大学)

24. 设n维线性空间V的线性变换$\mathscr{A}$在V的一组基下的矩阵是A, 且已知齐次线性方程组$AX=0$的解空间的维数是s, 则$dim\mathscr{A}V=$________. (2014年湖南师范大学)

25. 设 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},a_{i3},a_{i4}),i=1,2,3;\beta_j=(a_{1j},a_{2j},a_{3j}),j=1,2,3,4.$ 如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的秩为_____.

26. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, $\beta_1=3\alpha_1+(k+1)\alpha_2+5\alpha_3,\beta_2=k\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=k\alpha_2+4\alpha_3$，则 β_1,β_2,β_3 线性相关的充要条件是 $k=$_____.

27. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是数域 P 上的线性空间 V 的一组秩为 r 的向量组, 则使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$ 的 n 维向量 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 的全体构成的集合是 P^n 的_____维子空间.

28. $\mathbb{F}^{3\times3}$ 为 $\mathbb{F}$ 上所有三阶矩阵组成的集合, 令 $V=\left\{A|A\in\mathbb{F}^{3\times3}\right\}$ (其中 $\operatorname{tr}(A)=0$ 且 A 为上三角矩阵), 则 $\dim V=$_____.

29. 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix},V=\left\{B\in\mathbb{F}^{3\times3}|AB=BA\right\}$, 则 V 为 $\mathbb{F}$ 上_____ 维线性空间, 基为_____.

30. 设 $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},V=\left\{B\in\mathbb{F}^{3\times3}|AB=BA\right\}$, 则 V 为 $\mathbb{F}$ 上_____ 维线性空间, 基为_____.

31. 设 $\beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_r,\beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_r,\cdots,\beta_{r-1}=\alpha_1+\cdots+\alpha_{r-2}+\alpha_r,\beta_r=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{r-1}$ 则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 之秩 s 与 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 之秩 t 的关系是_____.

32. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是3维向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, 则由基 $\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3$ 到基 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 的过渡矩阵是_____.

33. 四维线性空间 V 上线性变换 $\mathscr{A}$ 的最小多项式是 $x(x-1)$, 值域维数是 2, 则存在 V 上的一组基, 使得 $\mathscr{A}$ 在此组基下矩阵是对角阵 $A=$_____.

34. 设 $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},V=\left\{B\in\mathbb{F}^{3\times3}|AB=BA\right\}$, 则 V 为 $\mathbb{F}$ 上_____ 维线性空间, 基为_____.

厦门大学《高等代数》

35. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $V=\{f(A)|f(x)\in\mathbb{F}(x)\}$, 则 V 为 $\mathbb{F}$ 上_____ 维线性空间, 基为: _____.

二. 选择题

1. 如果n维空间中的向量组$\alpha_1, 2\alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关, 向量β与$\alpha_k(k=1,2,\cdots,m)$都正交, 则向量组$\alpha_1, 2\alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$必然(　). (2009 年北京工业大学)

   (A)线性无关;　　(B)线性相关;

   (C)可能线性相关, 有可能线性无关;　　(D)前三个选项都不正确.

2. 若$S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$, $S_2=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$是有限维向量空间$V$的两个线性无关向量组, 且$r<t$, 则(　). (2011 年北京工业大学)

   (A)一定存在$\beta_h\in S_2$, 使得$S_1\cup\{\beta_h\}$ 仍是线性无关的;

   (B)一定不存在$\beta_h\in S_2$, 使得$S_1\cup\{\beta_h\}$仍是线性无关的;

   (C)可能存在$S_3=\{\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_{t-r}}\}\subseteq S_2$, 使得$S_1\cup S_3$ 是线性无关的(其中$1\le j_1<\cdots<j_{t-r}\le t$);

   (D)前三个选项都不正确.

3. 设自然数$m>n>1$, R表示实数域. 记$m\times n$型实矩阵$(a_{ij})_{m\times n}$的行向量组为$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$, 列向量组为$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$. 若它们线性组合成的向量空间分别记为$S_1=\{\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m|\lambda_i\in R, i=1,2,\cdots,m\}$, $S_2=\{\gamma_1\beta_1+\gamma_2\beta_2+\cdots+\gamma_n\beta_n|\gamma_i\in R, i=1,2,\cdots,n\}$ 则维数$dimS_1, dimS_2$之间的关系是(　). (2012年北京工业大学)

   (A)$dimS_1>dimS_2$;

   (B)$dimS_1<dimS_2$;

   (C)$dimS_1=dimS_2$;

   (D)没有确定的大小比较关系.

4. 设向量组$\mathrm{I}:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组$\mathrm{II}\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示, 则(　). (2013年北京工业大学)

   (A)当$r<s$时, 向量组II必线性相关;

   (B)当$r>s$时, 向量组II必线性相关;

   (C)当$r<s$时, 向量组I必线性相关;

   (D)当$r>s$时, 向量组I必线性相关.

5. 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关, 而$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关, 则下面论断正确的是(　). (2014年北京工业大学)

厦门大学《高等代数》

(A)α_1能被$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表出;

(B)α_1不能被$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表出;

(C)α_1能被α_3,α_4线性表出;

(D)α_4不能被α_2,α_3线性表出.

6. 设向量组I : $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由向量组II$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表示, 则(　). (2016年北京工业大学)

(A)当$s<t$时, 向量组I必线性无关;

(B)当$s<t$时, 向量组I必线性相关;

(C)当I线性无关时, 必有$s<t$;

(D)当II线性无关时, 必有$s<t$.

7. 设V为n为线性空间, V_1,V_2是V的子空间, 若$V=V_1+V_2$, 下列选项正确的是(　). (2017年北京工业大学)

(A)$n=dimV_1+dimV_2$;

(B)$n\le dimV_1+dimV_2$;

(C)$V_1\cap V_2=\emptyset$;

(D)$V_1\cap V_2\neq\emptyset$.

8. 设n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m<n)$线性无关, 则$n$维列向量$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$线性无关的充要条件是(　). (2015年北京交通大学)

(A)向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$可由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$线性表示;

(B)向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示;

(C)向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$与向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$等价;

(D)矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$与矩阵$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$的秩相等.

9. 下列能构成$\mathbb{R}^{2\times2}$子空间的是(　). (2015 年北京交通大学)

(A)$V_1=\{A\mid |A|=0,A\in\mathbb{R}^{2\times2}\}$;

(B)$V_2=\{A\mid tr(A)=0,A\in\mathbb{R}^{2\times2}\}$;

(C)$V_3=\{A\mid A^2=A,A\in\mathbb{R}^{2\times2}\}$;

(D)$V_4=\{A\mid A'=A$或$-A,A\in\mathbb{R}^{2\times2}\}$.

10. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta,\gamma$是数域$P$上线性空间$V$中的向量, 秩$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta)=$秩$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n=r$且秩$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\gamma)=r+1$, 则对任意$k\in P$, 秩$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta,\gamma+k\beta=$(　). (2015年北京交通大学)

厦门大学《高等代数》

(A)r;

(B)$r+1$;

(C)$r+2$;

(D)无法确定.

11. 设矩阵$A=(\alpha_1,\alpha 2,\alpha_3,\alpha_4)$经行初等变换变为矩阵$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$, 且$\alpha_1,\alpha 2,\alpha_3$线性无关, $\alpha_1,\alpha 2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关, 则(　). (2016年北京交通大学)

(A)β_4不能由β_1,β_2,β_3线性表示;

(B)β_4可由β_1,β_2,β_3线性表示, 但表示法不唯一;

(C)β_4可由β_1,β_2,β_3线性表示, 且表示法唯一;

(D)β_4能否由β_1,β_2,β_3线性表示不能确定.

12. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关, 则下列向量组中线性相关的是(　). (2010年北京科技大学)

(A)$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$;

(B)$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$;

(C)$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$;

(D)$\alpha_1+\alpha_2,2\alpha_1+\alpha_3,3\alpha_3+\alpha_1$.

13. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关, 则下列向量组中线性相关的是(　). (2011年北京科技大学)

(A)$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$;

(B)$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$;

(C)$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$;

(D)$\alpha_1+\alpha_2,2\alpha_1+\alpha_3,3\alpha_3+\alpha_1$.

14. 设 $\mathscr{A}$ 为 n 维线性空间 V 上线性变换, 则（　　）

A. $\mathscr{A}$ 可逆的充分必要条件是$\operatorname{Im}\ \mathscr{A}=V$；

B. $\operatorname{Im}\ \mathscr{A}+\ \ker\ \mathscr{A}=V$；

C. $\dim\operatorname{Im}\mathscr{A}+\dim\ker\mathscr{A}=n$；

D. $\operatorname{Im}\mathscr{A}\cap\ker\mathscr{A}=\{0\}$.

15. 设 $\mathscr{A}$ 为 n 维线性空间 V 上线性变换, $W_1,W_2,\cdots,W_n$ 为 V 的1维子空间, 且为 $\mathscr{A}$ 的不变子空间, 如果 $V=W_1+W_2+\cdots+W_n$, 则一定存在 V 中一个基, 使得 $\mathscr{A}$ 在此基下矩阵为(　)

A. 对角矩阵;　B. 反对称矩阵;　C. 可逆矩阵;　D. 对称矩阵.

16. 设 V 为 n 维线性空间, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\in V$, 且 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]A$ 其中 A 为 n 阶方阵, 下列结论正确的有 (　)

厦门大学《高等代数》

A. 当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的基时, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 为 V 的基;

B. 当 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 为 V 的基时 ,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的基;

C. 当 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 为 V 的基, 且 A 可逆时, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的基;

D. 只有当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的基, 且 A 可逆时, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 为 V 的基.

三.计算题

1. 向量组

$$\alpha_1=(1,1,-1,0,2)',\alpha_2=(0,1,1,1,-1)',\alpha_3=(-1,0,2,1,-3)',\alpha_4=(1,-1,-3,-2,4)'$$

求出它的一个极大线性无关组, 并把其余向量用此极大线性无关组线性表出. (2009年北京工业大学)

2. 向量组

$$\alpha_1=(1,-1,0,2)',\alpha_2=(1,1,1,-1)',\alpha_3=(1,3,2,-4)',\alpha_4=(5,1,3,1)'$$

求出它的一个极大线性无关组, 并把其余向量用此极大线性无关组线性表出. (2010年北京工业大学)

3. 向量组

$$\alpha_1=(0,1,-1,1)',\alpha_2=(1,-1,0,-1)',\alpha_3=(2,-1,-1,-1)',\alpha_4=(7,-4,-3,-4)'$$

(1)求此向量组的秩;
(2)求出它的一个极大线性无关组;
(3)在(2)的基础上, 把其余向量用此极大线性无关组线性表出. (2011年北京工业大学)

4. 在R^4中设$\alpha_1=(1,2,1,0)$, $\alpha_2=(-1,1,1,1)$, $\beta_1=(2,-1,0,1)$, $\beta_2=(1,-1,3,7)$. $W=L(\alpha_1,\alpha_2)$为α_1,α_2生成的子空间, $V=L(\beta_1,\beta_2)$为β_1,β_2生成的子空间. (2017年北京工业大学)
(1)求$W+V$的维数与一组基;
(2)求$W\cap V$的维数与一组基.

5. 求以下向量组的秩:

$$\alpha_1=(1,-1,2,1,0)',\alpha_2=(2,-2,4,-2,0)',\alpha_3=(3,0,6,-1,1)',\alpha_4=(0,3,0,0,1)'$$

再求出它的一个极大线性无关组, 并把其余向量用此极大线性无关组线性表出. (2011年北京交通大学)

6. 已知

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\a+1\\1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\b+2\end{pmatrix}.$$

厦门大学《高等代数》

(1)a,b为何值时, β不能被$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出?

(2)a,b为何值时, β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出且表示法不唯一; 此时写出其一般表达式. (2012年北京交通大学)

7. 已知$\alpha_1=(1,0,2,3)',\alpha_2=(1,1,3,5)',\alpha_1=(1,-1,a+2,1)',\alpha_4=(1,2,4,a+8)'$及$\beta=(1,1,b+3,5)'$.

(1)a,b为何值时, β不能表示成$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的线性组合?

(2)a,b为何值时, β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$唯一线性表示并写出该表示式? . (2010年北京科技大学)

8. 设$V=R^4,V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),V_2=L(\beta_1,\beta_2)$. 其中$\alpha_1=(1,2,-1,-3),\alpha_2=(-1,-1,2,1),\alpha_3=(-1,-3,0,5),\beta_1=(-1,0,4,-2),\beta_2=(0,5,9,-14)$. 求

(1)V_1的维数与一组基;

(2)V_2的维数与一组基;

(3)V_1+V_2的维数与一组基;

(4)$V_1\cap V_2$的维数与一组基. (2012年北京科技大学)

9. 已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$和$\beta_1,\beta_2,\beta_3$都是向量空间$V$的一组基, 且设$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$.

(1)已知$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&\end{pmatrix}$, 求一个三级排列$i_1,i_2,i_3$, 使得$\beta_{i1},\alpha_2,\alpha_3;\alpha_1,\beta_{i2},\alpha_3;\alpha_1,\alpha_2,\beta_{i3}$ 也是V的一组基.

(2)证明: 在任何矩阵下, 都可以找到一个三级排列i_1,i_2,i_3, 使得$\beta_{i1},\alpha_2,\alpha_3;\alpha_1,\beta_{i2},\alpha_3;\alpha_1,\alpha_2,\beta_{i3}$ 也是V的一组基. (2016 年北京科技大学)

10. 已知$\alpha_1=(-3,1,-2),\alpha_2=(1,-1,1),\alpha_3=(2,3,-1),\beta_1=(1,1,1),\beta_2=(1,2,3),\beta_3=(2,0,1)$, 证明: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$及$\beta_1,\beta_2,\beta_3$均是三维行空间的基, 并求出$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵. (2015年北京师范大学)

11. 给定$\mathbb{R}^4$的两个子空间,

$$V_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)'|2x_1-x_2+4x_3-3x_4=0,x_1+x_3-x_4=0\}$$
$$V_2=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)'|3x_1+x_2+x_3=0,7x_1+7x_3-3x_4=0\}$$

分别求$V_1+V_2,V_1\cap V_2$的一个基和维数. (2012年大连理工大学)

12. 设向量$\alpha_1=(-1,-2,-1,0),\alpha_2=(1,-1,-1,-1),\beta_1=(-2,1,0,-1),\beta_2=(-1,1,-3,-7)$, 记$\alpha_1,\alpha_2$生成的子空间为$L(\alpha_1,\alpha_2)$, β_1,β_2生成的子空间为$L(\beta_1,\beta_2)$, 求这两个子空间的交$L(\alpha_1,\alpha_2)\cap L(\beta_1,\beta_2)$的维数和一组基.(请给出必要的计算步骤) (2013年湖南大学)

13. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$n$维线性空间$V$ 的一组基, $\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\beta_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 是V的一组基, 又若$\alpha\in V$在前一组基下的坐标为$(n,n-1,\cdots,2,1)^T$, 求α在后一组基下的坐标. (2014 年湖南大学)

厦门大学《高等代数》

14. 设向量$\alpha_1=(1,2,1,0),\alpha_2=(-1,1,1,1),\beta_1=(2,-1,0,1),\beta_2=(1,-1,3,7)$, 求$\alpha_1,\alpha_2$生成的子空间$V$与向量组$\beta_1,\beta_2$生成的子空间为$W$的交$V\cap W$的基和维数.(请给出必要的计算步骤) (2015年湖南大学)

15. 设

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

是数域P上的线性空间$V=P^{2\times2}$的一组基.

(1)求由基

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\varepsilon_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

到基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的过渡矩阵;

(2)求$\beta=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$下的坐标. (2009年湖南师范大学)

16. 已知数域P上的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\\1&-1\end{pmatrix}.$$

令$S(A)=\{B\in P^{2\times3}|AB=0\}$. 证明: $S(A)$是矩阵空间$P^{2\times3}$的一个子空间, 并求$S(A)$的维数和一组基. (2011年湖南师范大学)

17. 设$\mathbb{R}^4$中的向量组

$$\alpha_1=(1,0,0,-1),\alpha_2=(0,1,1,2),\alpha_3=(1,2,2,3),$$

它们生成的子空间为V_1, 向量组

$$\beta_1=(1,-1,-1,-3),\beta_2=(-1,1,1,1),\beta_3=(3.-3,-3,-7),$$

它们生成的子空间为V_2. 求子空间V_1+V_2和$V_1\cap V_2$ 的基和维数. (2010年华东师范大学)

18. 假设空间 $\mathbb{Q}$ (有理数域)内有

$$\mathscr{A}(x)=y,\ \mathscr{A}(y)=z,\ \mathscr{A}(z)=x+y,$$

求满足条件的变换 $\mathscr{A}$ 生成空间的维数.(2017年华中科技大学)

厦门大学《高等代数》

19. (20 分) 设 $\mathbb{R}$ 表示实数域, $V = M_3(\mathbb{R})$ 表示所有 3×3 实矩阵构成的向量空间. 对给定的 $A \in M_3(\mathbb{R})$, 定义 V 上的线性变换 $\mathscr{A}: V \to V$ 为

$$\mathscr{A}(B) = AB - BA,\ 对任意的 B \in M_3(\mathbb{R})$$

设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

求 $\mathscr{A}$ 的特征值和相应的特征子空间; 并求此时 $\mathscr{A}$ 的极小多项式.(2010年华中师范大学)

20. 已知3 维列向量 $(2,0,1)^T$ 是3 级实对称矩阵$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & b \\ -2 & b & a \end{pmatrix}$ 的特征向量.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 求正交矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵, 并给出这个对角矩阵. (2010年兰州大学)

21. 设 $\xi = (1,1,2)^T$ 是实对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 2 \\ b & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

的一个特征向量.

(1) 求 a, b 的值.

(2) 求正交矩阵 T 使得 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵. (2016年兰州大学)

22. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = (1,1,-2)^T$, 线性方程组 $Ax = b$ 有解但是不唯一.

(1) 求 a 的值;

(2) 求正交矩阵 T 使得 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵. (2017年兰州大学)

23. (20 分) 设三维线性空间V 上的线性变换$\mathscr{A}$ 在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1$ 下的矩阵;

(2) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1, k\varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵, 其中 $k \in P$ 且 $k \neq 0$;

(3) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵. (2011年南京师范大学)

24. 设 V 为数域 P 上的3维线性空间, 已知 V 上的线性变换 T 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

厦门大学《高等代数》

试求 V 的一组基使得 T 在该基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

(2008年南开大学)

25. (20 分) 设V 为4 维实线性空间, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 为一组基, 已知V 上线性变换T 在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 试求出 T 的特征値与特征向量.

(2) 试分别求出 T 的核$\ker\ T$ 与象$\mathrm{Im}\ T$ 的维数与一组基. (2011 年南开大学)

26. 设 P 为数域, 定义 $n(n \geq 3)$ 级方阵 A 为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 设 $P^{n\times n}$ 中全体与 A 可交换的矩阵所组成的集合为 $C(A)$, 证明 $C(A)$ 是 $P^{n\times n}$ 的一个子空间.

(2) 试求出 $C(A)$ 的维数与一组基. (2012年南开大学)

27. 在 P^4 中, 已知 $V_1 = L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\quad V_2 = L(\beta_1,\beta_2)$. 其中

$$\alpha_1 = (1,1,-1,2)', \alpha_2 = (2,-1,3,0)', \alpha_3 = (0,-3,5,-4)', \beta_1 = (1,2,2,1)', \beta_2 = (4,-3,3,1)'.$$

求 $V_1 + V_2$ 和 $V_1 \cap V_2$ 的维数与一组基. (2014年南开大学)

28. 已知 V 是一个3维线性空间, 线性变换 $\mathscr{A}$ 在一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 在另一组基 η_1,η_2,η_3 下的矩阵为 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix}$, 求基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到基 η_1,η_2,η_3 的过渡矩阵 P. (2016年南开大学)

29. 设 $\mathbb{F}^4$ 上两个线性空间

$$W_1 = \{[x_1,x_2,x_3,x_4]\,|x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0, x_i \in \mathbb{F}\}$$
$$W_2 = \{[x_1,x_2,x_3,x_4]\,|3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 0, x_i \in \mathbb{F}\}$$

求 $W_1 \cap W_2$ 和 $W_1 + W_2$ 的基与维数. (2010年上海大学)

厦门大学《高等代数》

30. 设 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 的两组基分别为

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}.$$
$$\beta_1=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix},\beta_3=\begin{bmatrix}2&3\\4&6\end{bmatrix},\beta_4=\begin{bmatrix}3&4\\4&7\end{bmatrix}$$

(1) 求基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的过渡矩阵;

(2) 设 $\gamma=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$, 分别求 γ 在这两个基下坐标向量. (2010 年上海大学)

31. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 是4维线性空间 V 的一组基, 一线性变换 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为

$$\begin{bmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\2&2&7&6\\2&-2&1&-2\end{bmatrix}$$

求 $\mathscr{A}$ 的核的基与值域的基. (2011年上海大学)

32. 设

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&2&1\\2&5&2&5&2\\3&7&3&8&8\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&3&3&3&1\\3&7&3&7&3\\4&9&4&9&4\end{pmatrix}$$

$AX=0$ 的解空间 $V_1, BX=0$ 的解空间 V_2, 求 $V_1\cap V_2, V_1+V_2$ 的一组基. (2012年上海大学)

33. 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\2\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\3\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\2\end{pmatrix}$, 求此向量组的极大无关组, 并将其它向量用此向量组的极大无关组表示出来. (2013年上海大学)

34. A 为 n 阶方阵,其秩为 l, 若矩阵方程 $AX=\beta$(β 为$n\times 1$ 阶向量) 有解. 求其所有解张成的线性空间的维数. (2011年上海交通大学)

35. 设 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 是复数域上 n 阶方阵构成的线性空间, 给定自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$, 在 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 内定义线性变换 $\mathscr{A}$ 如下:

$$\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_n})$$

其中 α_k 是 n 维列向量. $1\le k\le n$.

1. 给出 $\mathscr{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量.

2. 若取排列2 3 4 n 1, 证明: $\mathscr{A}$ 对应的矩阵可对角化.

36. 设 V 为所有 n 阶实对称方阵组成的实线性空间, 计算 V 的维数. (2010年首都师范大学)

厦门大学《高等代数》

37. 设 V 为7维实线性空间, $W \subset V$ 为4维线性子空间, 记End(V) 为 V 到自身的所有线性映射组成的线性空间, 令

$$M = \{f \in \mathrm{End}(V) | F(W) \subset W\}$$

说明 M 是End(V)的线性子空间, 并给出 M 的维数. (2012 年首都师范大学)

38. (15 分) 记M 为2 阶实方阵组成的线性空间, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in M$. 定义映射$f : M \to M$ 为$f(A) = AB - BA(\forall A \in M)$, 验证 f 是线性映射, 并写出 f 的基

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

下的矩阵. (2014年首都师范大学)

39. 设$M_2(F)$ 是数域F上的2阶方阵组成的线性空间，设V是由如下的4个矩阵生成$M_2(F)$ 的子空间：

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

（1）求dim V并写出V的一组基.

（2）设映射$f : V \to F$ 为：$f(A) = tr(A)$，其中$tr(A)$ 表示矩阵A的迹.求$dimkerf$ 并写出$kerf$ 的一组基.(2011年四川大学)

40. 设A是实数域上的$m \times n$ 型矩阵，A的秩为r.求线性空间$V = \{X \in \mathbb{R}^n | A'AX = 0\}$ 的维数，这里，A' 表示A的转置.(2013年四川大学)

41. 令$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为数域P上的n维线性空间V的一组基，V_1 表示由$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ 生成的子空间，以及

$$V_2 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i | \sum_{i=1}^{n} x_i = 0, x_i \in P \right\}.$$

证明：

（1）V_2 为V的子空间.

（2）$V = V_1 \bigoplus V_2$.(2015年湘潭大学)

42. 设V是实数域上所有2×2 矩阵构成的线性空间，求矩阵A在基$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 下的坐标. (2010年云南大学)

43. 求向量组$\alpha_1 = (6, 4, 1, -1, 2), \alpha_2 = (1, 0, 2, 3, -4), \alpha_3 = (7, 1, 0, -1, 3), \alpha_4 = (1, 4, -9, -16, 22)$ 的一个极大无关组. (2013年云南大学)

44. 设A是数域F上的n阶方阵，向量α_i 满足$(\lambda_i I - A)^n \alpha_i = 0, i = 1, 2$.求证：若$\lambda_1 \neq \lambda_2$，则$F[A](\alpha_1 + \alpha_2) = F[A]\alpha_1 \oplus F[A]\alpha_2$.（注：$F[A] = \{f(A)\alpha | f(x) \in F[x]\}$.）(2014年中科大)

厦门大学《高等代数》

45. 在线性空间$M_3(\mathbb{R})$ 中（运算为矩阵的乘法和数乘），考虑线性子空间

$$V = \left\{ A \in M_3(\mathbb{R}) | A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \right\},$$

求维数$dimV$. (2015年中科大)

46. 已知A为幂等矩阵,证明$\mathcal{R}(E_n - A) = \mathcal{N}(A)$,其中$\mathcal{R}(B)$ 是B的列向量张成的线性空间,$\mathcal{N}(B)$ 为B的解空间,即$\mathcal{N}(B) = \{x|Bx = 0\}$. (2017年国科大)

47. 设

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1;$$

$$g(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4.$$

V是数域F上次数小于4的多项式组成的线性空间,令U为由$\{f, g\}$ 生成的子空间.求商空间V/U 的一组基. (2011年中山大学)

48. 设$A \in M_n(F)$ 在F上有n个不同的特征值,令$W = \{B \in M_n(F)|AB = BA\}$.求$dimW$. (2016年中山大学)

四.证明题

1. 设$n \geq 2$, $M_n(K)$为K上所有n阶方阵所成集合, $M_n(K)$ 上的一个函数f即为映射$f : M_n(K) \longrightarrow K$. $M_n(K)$ 上的所有函数组成的集合记为$F(K)$, 在$F(K)$中定义加法和数乘运算如下: 对任意$f, g \in F(K)$, 任意$k \in K$和任意$A \in M_n(K)$,

$$(f + g)(A) = f(A) + g(A), (kf)(A) = kf(A)$$

则$F(K)$关于此运算成为数域K上的一个线性空间. 对于$f \in F(K)$, f 称为是列线性函数, 如果f对于矩阵的每一列都是线性的, 即对K^n中的任意向量$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n, \beta$, 任意$1 \leq j \leq n$ 以及任意的$k \in K$, 都有

$$f(\beta_1, \cdots, \beta_{j-1}, \beta_j + \beta, \beta_{j+1}, \cdots, \beta_n) = f(\beta_1, \cdots, \beta_{j-1}, \beta_j, \beta_{j+1}, \cdots, \beta_n) + f(\beta_1, \cdots, \beta_{j-1}, \beta, \beta_{j+1}, \cdots, \beta_n)$$

和

$$f(\beta_1, \cdots, \beta_{j-1}, k\beta_j, \beta_{j+1}, \cdots, \beta_n) = kf(\beta_1, \cdots, \beta_{j-1}, \beta_j, \beta_{j+1}, \cdots, \beta_n)$$

(其中的矩阵用它们的列向量组表示出), 而f称为是反对称的若$A \in M_n(K)$有两列向量相同时必有$f(A) = 0$.用$SP(K)$表示$F(K)$中所有反对称列线性函数所成的集合, 证明: $SP(K)$是$F(K)$的一个子空间, 并求$SP(K)$ 的维数和一组基. (2009年北京大学)

厦门大学《高等代数》

2. 设U为齐次线性方程组$ABX=0$的解空间, 其中A为$n\times m$矩阵, B为$m\times n$矩阵, X为$p\times 1$ 矩阵, 证明: m维向量空间K^m中子集合

$$W=\{Y=BX, X\in U\}$$

是子空间, 它的维数等于$rank(B)-rank(AB)$, 并利用此结论证明对任意三个矩阵A,B,C有

$$rank(AB)+rank(BC)\leq rank(B)+rank(ABC). \text{ (2009年北京大学)}$$

3. 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关, 且可以由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表出, 证明: 必存在某个向量$\beta_j(j=1,2,\cdots,t)$, 使得向量组$\beta_j,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关. (2010 年北京大学)

4. 令V是全体n阶复矩阵组成的向量空间, 求$dim\{AB-BA|A,B\in V\}$. (2014年北京大学)

5. 考虑线性空间$M_n(K)$. 称$V\subset M_n(K)$是一个公共子空间, 如果对每个$A\in M_n(K)$及每个$B\in V$ 使得$AB\in V$.
(1)构造$n+1$个不同的n维公共子空间.
(2)证明每个n维子空间都是极小的, 即若有另外的子空间$V'\subset V$, 则要么$V=V'$要么$V'=0$. (2018年北京大学)

6. 设实矩阵A,B可以作乘法AB. $R(B),R(AB)$分别表示B,AB的秩.证明: 满足条件$ABX=0$ 的所有BX构成一个维数是$R(B)-R(AB)$的向量空间. (2009年北京工业大学)

7. 设A是n阶方阵. 令$T(A)=\{B|AB=BA, B\in\mathbb{R}^{n\times n}\}$. (2015年北京工业大学)
(1)证明$T(A)$是$\mathbb{R}^{n\times n}$的子空间;
(2)若A是主对角线元素两两不等的对角矩阵, 求$T(A)$的维数和一组基;
(3)设$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 1 & \cdots & \cdots & 1\end{pmatrix}_{n\times n}$, 求$T(A)$的维数和一组基.

8. 设向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$线性无关, 且

$$\xi_i=a_{1i}\beta_1+a_{2i}\beta_2+\cdots+a_{mi}\beta_m, ()i=1,2,\cdots,s),$$

证明: 向量组$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$的秩等于矩阵$(a_{ij})_{m\times s}$的秩. (2012年北京交通大学)

9. 设V_1和V_2是有限维线性空间V的两个子空间, 证明:

$$dimV_1+dimV_2=dim(V_1+V_2)+dim(V_1\cap V_2)$$

. (2014年北京交通大学)

厦门大学《高等代数》

10. (1)证明: 在$P[x]_n$中, 多项式

$$f_i=(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n), i=1,2,\cdots,n,$$

是一组基, 其中$a_1,a_2,\cdots,a_n$是互不相同的数.

(2)在(1)中, 取$a_1,a_2,\cdots,a_n$为全体n次单位根, 求由基$1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$到基$f_1,f_2,\cdots,f_n$的过渡矩阵. (2017年北京交通大学)

11. 设V_1与V_2是线性空间V的子空间, 证明: $V_1\cup V_2$是子空间的充要条件为$V_1\cup V_2=V_1+V_2$. (2009 年北京科技大学)

12. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$n$为线性空间$V$ 的一组基, 向量$\beta\in V$可以由这组基中的任意$n-1$个线性表示, 证明$\beta=0$. (2011年北京科技大学)

13. 设S,A分别是$P^{n\times n}$中的对称矩阵和反对称矩阵构成的子空间. 证明: $P^{n\times n}=S\oplus A$. (2013年北京科技大学)

14. $dimV=n$, 证明: V的任一真子空间都可以表示为若干个$n-1$维子空间的交. (2011年北京师范大学)

15. 存在非零向量α, 使得$A^m\alpha\neq 0, A^{m+1}\alpha=0$, 证明:

(1)$\alpha,A\alpha,A^2\alpha,\cdots,A^{m+1}\alpha=0$线性无关.

(2)$r(A^n)=r(A^{n+1})$. (2012年北京师范大学)

16. 已知W是所有迹为0的3阶实对称矩阵构成的集合, 证明: W是加法和数乘构成的向量空间并给出一组基. (2015年北京师范大学)

17. 已知$dim(V_1+V_2)=dim(V_1\cap V_2)+1$, 证明: $V_1\subseteq V_2$或$V_2\subseteq V_1$. (2015 年北京师范大学)

18. 设V是数域F上的一个n维向量空间, 域F包含域E, 域F可以看作域E上的向量空间(其加法是域F的加法, 数乘是E中元素与F中元素在域F中做乘法), 设$dim_EF=m$.

(1)证明: V可以成为域E上的一个向量空间.

(2)求V作为域E上向量空间的维数. (2016年北京师范大学)

19. 已知V为数域K上的线性空间, V_1,V_2为V的子空间. 证明:

(1)若V_1,V_2为V的真子空间, 则$V_1\cup V_2\neq V$.

(2)若$dimV_1=dimV_2$, 则存在子空间W, 使得$V=V_1\oplus W=V_2\oplus W$. (2019年北京师范大学)

20. 已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的极大线性无关组, 且$\alpha_1=\beta_1+\beta_2+\beta_3$, $\alpha_2=\beta_1+2\beta_2+\beta_3$, $\alpha_3=\beta_1+2\beta_2+3\beta_3$, 求证: β_1,β_2,β_3也为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的极大线性无关组. (2009 年大连理工大学)

厦门大学《高等代数》

21. 设$V=\left\{\begin{pmatrix} a & b-a & -b \\ -a-b & 0 & a+b \\ b & a-b & -a \end{pmatrix} | a,b\in P\right\}\subseteq P^{3\times 3}$ 是数域P上三阶实方阵的子集合.

(1)证明: V是$P^{3\times 3}$的一个子空间;

(2)证明: $V=V_1\oplus V_2$, 其中V_1是由V中对称矩阵构成的集合, V_2是由V中反对称矩阵构成的集合;

(3)求V的一组基底, 并求$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -7 & 0 & 7 \\ 5 & -3 & -2 \end{pmatrix}$在该基底下的坐标. (2011年大连理工大学)

22. 设V_1是域F上的有限维线性空间V的子空间, V^*是V 的对偶空间, 记$V_1^{\perp}=\{f\in V^*|f(v)=0,\forall v\in V_1\}$. 证明:

(1)$V_1^{\perp}$是V^*的子空间;

(2)若V_2是V的另一个子空间, 则$V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}=(V_1+V_2)^{\perp}$. (2013年大连理工大学)

23. 设向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$; $\beta_1,\cdots,\beta_t$; $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t$ 的秩分别为r_1,r_2,r_3. 证明:

$$max(r_1,r_2)\le r_3\le r_1+r_2.$$ (2015年大连理工大学)

24. 设V_1,V_2,V_3均为n维实线性空间V的子空间, 若$V=V_1\oplus V_2$且$V_1\subset V_3$, 证明:

$$V_3=V_1\oplus(V_2\cap V_3).$$ (2018年大连理工大学)

25. 设$A\in\mathbb{R}^{m\times s}$, $B\in\mathbb{R}^{s\times n}$, $W=\{Bx|ABx=0,x\in\mathbb{R}^{n\times 1}\}$.

(1)证明: W是$\mathbb{R}^{s\times 1}$的子空间.

(2)求W的维数. (2018年大连理工大学)

26. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是一组三维向量, 证明: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关的充要条件是任意一个三维向量都可以由它们线性表出, 并作出几何解释. (2009年湖南大学)

27. 设V是数域P上的一个n维线性空间, 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$V$的一组基. 用$V_1$ 表示由向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$生成的子空间, 令

$$V_1=\{k\alpha_1+k\alpha_2+\cdots+k\alpha_n,k\in P\},V_2=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n|\sum_{i=1}^{n}k_i=0,k_i\in P\}.$$

证明:

(1)V_1,V_2是V的子空间;

(2)$V=V_1\oplus V_2$. (2009年湖南大学)

28. 设$A\in P^{n\times n}$, 且$A^2=E_n$, 其中E_n为n阶单位矩阵, 令

$$V_1=\{x\in P^n|Ax=x\},V_2=\{x\in P^n|Ax=-x\}$$

厦门大学《高等代数》

证明:

(1)V_1和V_2均为P^n的子空间;

(2)$P^n = V_1 \oplus V_2$, 其中$\oplus$表示子空间的直和. (2011 年湖南大学)

29. 在数域P上, 设方程组$x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_x = 0$的解空间为$M$, 方程组$x_1 = \frac{1}{2}x_2 = \cdots = \frac{1}{n}x_n$ 的解空间为N, 证明: $P^n = M \oplus N$. (2015年湖南大学)

30. 设$V = \mathbb{R}^n$是n维向量空间, A是反对称方阵, 定义$f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}^n$如下:

$$f(\alpha, \beta) = \alpha^T A \beta,$$

α^T表示α的转置向量, 记$N = \{\alpha \in V : 对所有\beta \in V有f(\alpha, \beta) = 0\}$, 证明:

(1)N是V的线性子空间;

(2)矩阵A的秩$r(A) = n - dimN$, 其中$dimN$表示N的维数;

(3)$r(A)$是偶数. (2017年湖南大学)

31. 设V是数域P上的n维线性空间, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是$V$的一组基, V_1 是由$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$生成的子空间,

$$V_2 = \{\sum_{i=1}^{n} k_i a_i | \sum_{i=1}^{n} k_i = 0, k_i \in P\}.$$

(1)证明: V_2是V的子空间;

(2)证明: $V = V_1 \oplus V_2$;

(3)若V上线性变换$\mathscr{A}$在基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$下的矩阵是:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

证明: V_1与V_2都是$\mathscr{A}$的不变子空间. (2009 年湖南师范大学)

32. 设s是一个实数, 在实数域$\mathbb{R}$上的多项式空间$\mathbb{R}[x]$中, 令

$$W = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] | f(s) = 0, \partial(f(x)) \leq n 或 f(x) = 0\}.$$

证明:

(1)W是$\mathbb{R}[x]$的一个子空间;

(2)$g_i(x) = x^i - s^i (i = 1, 2, \cdots, n)$是$W$的一组基. (2013年湖南师范大学)

33. 设A是实数域$\mathbb{R}$上的n阶方阵, 向量$\alpha \in \mathbb{R}^n$(实数域$\mathbb{R}$上的n维列向量), 使得

厦门大学《高等代数》

$$\alpha, A\alpha, A^2\alpha, \cdots, A^{n-1}\alpha$$

是$\mathbb{R}^n$的一组基, 如果$\mathbb{R}$上的n阶方阵B满足条件$AB = BA$, 证明:

(1)存在实数域$\mathbb{R}$上的一个次数不超过$n-1$的多项式$f(x)$ 使得$B\alpha = f(A)\alpha$;

(2)对于(1)中找到的多项式$f(x)$, 必有$B = f(A)$. (2013年湖南师范大学)

34. 设A, B, C, D都是数域P上的n阶方阵, 它们关于矩阵乘法两两可交换, E是n阶单位矩阵, 且$AC+BD = E$. 令V, V_1, V_2分别是线性方程组$(AB)X = 0$, $AX = 0$和$BX = 0$的解空间, 证明:

$$V = V_1 \oplus V_2. \text{ (2015年湖南师范大学)}$$

35. 设$\mathscr{A}$是数域K上有限维线性空间V上的线性变换, W 是V的$\mathscr{A}-$子空间.

(1)在V上定义一个二元关系$\sim$: $u \sim v \Leftrightarrow u - v \in W$. 证明: $\sim$是一个等价关系.

(2)设$V/W = \{[u] | u \in W\}$是由(1)中的等价关系所确定的所有等价类组成的集合. 在此集合上定义加法及标量乘法运算如下:

$$[u] + [v] := [u + v], k[u] := [ku], k \in K, u, v \in V.$$

证明: V/W按这样的定义的运算构成数域K上线性空间(称为由W确定的V 的商空间).

(3)证明: $dim(V/M) = dim(V) - dim(W)$.

(4)定义V/W上的变换$\mathscr{B}$: $\mathscr{B}([u]) = [\mathscr{A}(u)]$, $u \in V$. 证明: $\mathscr{B}$ 是商空间V/W上的线性变换.

(5)证明: $f_{\mathscr{A}}(\lambda) = f_{\mathscr{A}|_W}(\lambda) f_{\mathscr{B}}(\lambda)$, 其中$f_{\mathscr{A}}(\lambda)$表示线性变换$\mathscr{A}$的特征多项式, $\mathscr{A}|_W$表示$\mathscr{A}$在W上的限制. (2011年华东师范大学)

36. 设K_n是数域K上的线性空间.

(1)若$K_n = V_1 \oplus V_2$, 其中V_1, V_2是K_n的两个非平凡子空间. 证明: 存在唯一的幂等矩阵$A \in M_n(K)$, 使

$$V_1 = \{X \in K^n | AX = 0\}, V_2 = \{X \in K^n | AX = X\}.$$

(2)若取子空间

$$V_1 = \{X = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \in K^n | a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0\}, V_2 = \{X \in K^n | X = (a, a, \cdots, a)^T\}.$$

证明: $K^n = V_1 \oplus V_2$, 并求(1)中对应的幂等矩阵A. (2012 年华东师范大学)

37. (1)利用初等变换将下列矩阵化成简化的行阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

厦门大学《高等代数》

(2)设V是数域K上的有限维线性空间, 给定它的一组基$e_1, e_2, \cdots, e_n$. 对于V的一个非零向量$\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, 若$i$是最小的正整数使得$\lambda_i$不为0, 则称$e_i$为它的$Tip$, 记为$e_i = Tip(\alpha)$, 对于$V$的一个子空间$W$, 定义

$$Tip(W) = \{Tip(\alpha : \alpha \in W, \alpha \neq 0)\}.$$
$$NonTip(W) = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\} - Tip(W). \;($$

现设$V = K^7$是7维行向量组成的空间, 取它的标准基$e_1, e_2, \cdots, e_7$. 令W为(1)中矩阵的行向量张成的子空间, 求$Tip(W)$和$NonTip(W)$.

(3)设V是数域K上的有限维线性空间, 给定它的一组基$e_1, e_2, \cdots, e_n$, 设W是V的一个子空间. 证:

$$V = W \oplus Span_k(NonTip(W)),$$

这里$Span_k(NonTip(W))$是$NonTip(W)$张成的子空间. (2018年华东师范大学)

38. $GL_2(\mathbb{C})$为2阶可逆复矩阵集合, V是迹为0的2 阶复矩阵构成的复线性空间. 若V的一个线性子空间W满足: $\forall P \in GL_2(\mathbb{C})$与$\forall A \in W$, 总有$P^{-1}AP$落在$W$ 中, 则称W为$GL_2(\mathbb{C})-$不变子空间. 求证: V的$GL_2(\mathbb{C})-$不变子空间只有零空间和V. (2019年华东师范大学)

39. 设$P[x]_n$表示数域P上所有次数$< n$的多项式及零多项式构成的线性空间, 令多项式

$$f_i(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_{i-1})(x - a_{i+1}) \cdots (x - a_n),$$

其中$i = 1, 2, \cdots, n$, 且$a_1, a_2, \cdots, a_n$是数域P中的n 个互不相同的数.

(1)证明: $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$是$P[x]_n$的一组基;

(2)在(1)中, 取$a_1, a_2, \cdots, a_n$为全体n次单位根, 求由基$1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$到基$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 的过渡矩阵T. (2009年华南理工大学)

40. 设V是n维线性空间$(n \geq 3)$, X和Y为V的两个子空间, 并且

$$dim(X) = n - 1, dim(Y) = n - 2$$

(1)证明: $dim(X \cap Y) = n - 2$或$n - 3$.

(2)证明: $dim(X \cap Y) = n - 2$当且仅当Y是X的子空间.

(3)举例说明: 存在满足题设条件的线性空间V及其子空间X和Y使得$dim(X \cap Y) = n - 2$. (2010年华南理工大学)

41. 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$为数域$P$上的$n$ 维线性空间上的一组基, A为P上一个$n \times s$ 矩阵. 若

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A,$$

厦门大学《高等代数》

则$L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$的维数$=r(A)$. (2011 年华南理工大学)

42. 设$\mathscr{A}$是n维线性空间V的一个线性变换.

(1)证明: V包含值域$\mathscr{A}V$的任何子空间W都是$\mathscr{A}-$ 子空间;

(2)在核$\mathscr{A}^{-1}(0)$中取一组基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$, 并将它们扩充为$V$的一组基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n$, 问: 在这组基下$\mathscr{A}$的矩阵$A$有什么样的形状? (2013年华南理工大学)

43. 设A是数域P上的n阶方阵, $f(x),g(x)$为数域P上的多项式, 且$(f(x),g(x))=1$, 令$h(x)=f(x)g(x)$, 用V_1,V_2,V分别表示n 元齐次线性方程组$f(A)X=0$, $g(A)X=0$, $h(A)X=0$ 的解空间, 这里$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$. 证明: $V=V_1\oplus V_2$. (2013年华南理工大学)

44. 设

$$W=\{f(x)|f(1)=0,f(x)\in\mathbb{R}[x]_n\},$$

这里$\mathbb{R}[x]_n$表示实数域$\mathbb{R}$上的次数小于n的多项式添上零多项式构成的线性空间.

(1)证明W是$\mathbb{R}[x]_n$的子空间;

(2)求W的维数与一组基. (2014年华南理工大学)

45. 设V是数域P上的n维线性空间, V_1是V的子空间且$dimV_1\geq\frac{n}{2}$.

(1)证明: 存在V的子空间W_1,W_2使得$V=V_1\oplus W_1=V_1\oplus W_2$, 而$W_1\cap W_2=\{0\}$.

(2)问: 当$dimV_1<\frac{n}{2}$时, 上述结论是否成立? 为什么? (2017 年华南理工大学)

46. 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 内的一个幂等线性变换, 即

$$\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$$

(1) 证明 V 是 $\mathrm{Im}(V)$ 与 $\ker(V)$ 的和空间. 这个和是直和吗? 说明你的理由. (3) 求 $\mathscr{A}$ 的极小多项式.(2009年华中科技大学)

47. 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 的线性变换, 且 $\mathscr{A}^2=\mathscr{J}$ 是单位变换.

(1) 证明: $V=\mathrm{Im}\,\mathscr{A}\oplus\ker\mathscr{A}$;

(2) 试求 $\mathscr{A}$ 的最小多项式.(2011年华中科技大学)

48. 设 $\mathscr{A}$ 是线性空间 V 的线性变换, 对 V 中任意的 α,β 有

$$(\mathscr{A}(\alpha),\beta)=(\alpha,\mathscr{A}(\beta)).$$

证明:

(1) $\mathrm{Im}\,\mathscr{A}=\ker\mathscr{A}^{\perp}$;

(2) W 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间, 则 $W^{\perp}$ 也是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.(2011年华中科技大学)

厦门大学《高等代数》

49. 设 n 阶矩阵 A 的 n 个特征值两两不同, $AB=BA$ 证明:

(1) A 与 B 有相同的特征向量;

(2) A, B 可对角化.(2013年华中科技大学)

50. 对线性空间 V ，有线性变换 $\mathscr{A}$ 的不同特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 的相应的特征向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$, 若有 $\alpha_1+\cdots+\alpha_k \in \quad W$, 而 W 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间, 求证:

$$\dim(W) \geq k.$$

(2015年华中科技大学)

51. 设 $A, B \in P^{n \times n}$, 且 A 的 n 个特征值两两互异, 则

$$A\text{的特征向量恒为}B\text{的特征向量} \Leftrightarrow AB=BA.$$

(2016年华中科技大学)

52. 设空间 $C^{n \times n}$ 上的变换

$$\mathscr{B}_A(X): XA-AX,$$

其中 A 为复矩阵, 证明 $\mathscr{B}_A(X)$ 的秩至多为 n^2-n . (2016年华中科技大学)

53. 设 V 为 n 维线性空间, 且 $W=\{x \in V, \delta(x)=2x\}$. 且有 $\delta^n(x)=2^n\varepsilon($ 恒等变换).

证明: W 为 V 的一个子空间, 且

$$\dim W=\frac{\operatorname{tr}(\delta)}{2n}+\frac{\operatorname{tr}\left(\delta^2\right)}{2^2 n}+\cdots+\frac{\operatorname{tr}\left(\delta^n\right)}{2^n n}.$$

(2017年华中科技大学)

54. 已知矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m \times n}$, 其中 A 的每个元素都是整数.

1. 如果整数 m 是矩阵 A 的特征值, 试证明 $m \mid \det(A)$.

2. 如果对于任意的 j 都有 $\sum\limits_{i=1}^n a_{ij}=m$, 那么 m 是 A 的特征值.(2017年华中科技大学)

55. 设 V 是有限维向量空间, 设 U, W 是 V 的两个子空间.

(1) 什么是 U 与 W 的和子空间 $U+W$? 请叙述关于 $U+W$ 的维数公式.

(2) 证明关于和子空间的维数公式. (2009年华中师范大学)

56. 设 A 为 n 阶实矩阵, $\lambda_i=r+si$ 是 A 的特征根, 其中 r, s 是实数, i 是虚数单位.

(1) 证明: $\frac{1}{2}\left(A+A'\right)$ 的特征根都是实数,

$mu_1 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n$ 是 $\frac{1}{2}\left(A+A'\right)$ 的全部特征根.

(2) 证明: $\mu_1 \leqslant r \leqslant \mu_n$

(3) 你有类似的估计 s 的为法吗? (2009年华中师范大学)

厦门大学《高等代数》

57. 设 $\mathbb{R}$ 是实数域, $V=C^1[0,1]$ 是闭区间[0,1] 上的实连续可微函数的集合. V 在函数的加法和数乘函数的运算下是一个向量空间.

(1) 证明函数 $f(x)=\cos x, g(x)=2x, h(x)=\mathrm{e}^x$ 在 V 中线性无关.

(2) 任意给定 $n>0$, 在 V 中找出 $n+1$ 个线性无关的元素, 并证明你的结论.

(3) 对某个 m, 是否有 V 和 $\mathbb{R}^m$ 同构, 如果是, 给出证明; 如果不是, 说明理由. (2011年华中师范大学)

58. 设 $\mathscr{A}$ 是实向量空间 V 上的线性变换, 且满足 $\mathscr{A}^2=\mathrm{idv}$, 这里idv 表示 V 上的恒等变换. 定义两个子空间如下:

$$\begin{gathered} V_1=\{v\in V|\mathscr{A}(v)=v\} \\ V_2=\{v\in V|\mathscr{A}(v)=-v\} \end{gathered}.$$

证明: $V=V_1\oplus V_2$. (2011年华中师范大学)

59. 设 W_1,W_2 是 n 维欧氏空间 V 的子空间, 且 W_1 的维数小于 W_2 的维数. 证明: 在子空间 W_2 中必存在非零向量与 W_1 中的所有向量正交. (2011 年华中师范大学)

60. 设 $C\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, 设 V 为 $\mathbb{F}^n$ 的子空间. 令 $\operatorname{rank}(C)$ 表示矩阵 C 的秩, $\dim(V)$ 表示向量空间 V 的维数. 设 W 是齐次线性方程组 $CX=0$ 的解子空间. 证明: 如果 $W\cap V=0$, 则

$$\operatorname{rank}(C)\geqslant\dim(V).$$

(2012年华中师范大学)

61. (25 分)

(1) 设 $\mathbb{F}$ 是任意数域, $A\in M_{n\times m}(\mathbb{F}), B\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. 证明:

$$\det\left(\lambda E_{n\times n}-AB\right)=\lambda^{n-m}\det\left(\lambda E_{m\times m}-BA\right).$$

(2) 设 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)$ 是非零实向量, 令 α^T 表示向量 α 的转置. 求 $C=\alpha^T\alpha$ 的特征值和特征向量.

(3) 矩阵 C 可以相似对角化吗？为什么？(2012年华中师范大学)

62. 设 $\mathbb{F}$ 是个数域, $\mathbb{F}^n$ 表示 n 维 $\mathbb{F}-$ 列构成的向量空间。证明:

(1) 对 $\mathbb{F}$ 的任意一个子空间 V , 一定存在 n 阶 $\mathbb{F}-$ 方阵 A, 使得 V 恰好是齐次线性方程组 $AX=0$ 的解子空间.

(2) 设 $\mathbb{F}^n$ 的两个子空间 $V_1=\{x|AX=0\}, V_2=\{x|BX=0\}$, 其中 AB 均为 n 阶 $\mathbb{F}-$ 方阵. 证明: $\mathbb{F}^n=V_1\oplus V_2$ 当且仅当

$$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)=n \text{ 且} \operatorname{rank}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=n.$$

(2014年华中师范大学)

厦门大学《高等代数》

63. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是3 维复列向量空间 $\mathbb{C}^3$ 的一组基, 令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),Q=(\alpha_1,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3)$ 设 A,B 均为3 阶复方阵. 且满足

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix},Q^{-1}BQ=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

证明:

(1) P,Q 均为可逆矩阵.

(2) A,B 有完全相同的特征根 (计重数)) 与完全相同的特征向量.

(3) $AB\neq BA$. 从而说明两个方阵即使有完全相同的特征根与完全相同的特征向量. 它们也不一定相乘可交换. (2014年华中师范大学)

64. 设 A 是 n 阶复方阵, 且0 作为 A 的特征根的代数重数为 k. 证明:

$$\operatorname{rank}\left(A^k\right)=n-k.$$

(2014年华中师范大学)

65. 设 $\mathbb{F}\subseteq\mathbb{K}$ 是两个数域, $\mathbb{F}^n$ 表示所有 n 维 $\mathbb{F}-$ 列向量构成的向量空间. $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 为 $\mathbb{F}^n$ 中的 r 个向量. 证明: $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 作为 $\mathbb{F}^n$ 中的向量线性无关当且仅当 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 作为 为 $\mathbb{K}^n$ 中的向量线性无关. (2016年华中师范大学)

66. 设 $\mathbb{F}$ 是一个数域, $M_n(\mathbb{F})$ 是由所有 n 阶 $\mathbb{F}-$ 矩阵在矩阵加法和数乘矩阵之下构成的 $\mathbb{F}-$ 向量空间. 设 V 是 $M_n(\mathbb{F})$ 的一个非零子空间, 且满足 V 中的任何非零矩阵都是可逆矩阵.

(1) 举出一个这样的子空间 V 的例子从而说明这样的子空间确实存在.

(2) 证明 V 的维数满足: $\dim(V)\leqslant n$. (2016年华中师范大学)

67. 设 $\mathbb{F}$ 是一个数域, V 是一个有限维 $\mathbb{F}-$ 向量空间. $mathscrA$ 是 V 的一个线性变换.

(1) 叙述 $\mathscr{A}$ 的核子空间ker($\mathscr{A}$)和像子空间Im($\mathscr{A}$) 的定义.

(2) 若 $\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$, 证明: $V=\ker(\mathscr{A})\oplus\operatorname{Im}(\mathscr{A})$. (2015年华中师范大学)

68. 设 $\mathbb{F}$ 是一个数域. $M_n(\mathbb{F})$ 表示所有 $n\times n$ 的 $\mathbb{F}$ 矩阵的复合. 设 $f:M_n(\mathbb{F})\to\mathbb{F}$ 是一个 $\mathbb{F}$ 线性函数也就是说 f 满足 $f(A+B)=f(A)+f(B)$, $f(cA)=cf(A)$, 对任意的 $A,B\in M_n(\mathbb{F})$, $c\in\mathbb{F}$. 而且 f 满足 $f(AB)=f(BA)$, 对任意的 $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ 成立. 证明:

(1) 对 n 阶零矩阵 $0_{n\times n}$ 有 $f\left(0_{n\times n}\right)=0$.

(2) 对任意的 $1\leqslant k,l\leqslant n$, 设 E_{kl} 是 (k,l) 位置为1其余位置为0的 n 阶 $\mathbb{F}$ 方阵. 则当 $k\neq l$ 时有 $f\left(E_{kl}\right)=0$; 对任意的 $1\leqslant i,j\leqslant n$ 有 $f\left(E_{ii}\right)=f\left(E_{jj}\right)$.

(3) 一定存在一个数 c_0 使得: $f(A)=c_0\cdot\operatorname{tr}(A)$ 对任意的 $A\in M_n(\mathbb{F})$ 成立. 这里 $\operatorname{tr}(A)$ 表示矩阵 A 的迹. (2017年华中师范大学)

厦门大学《高等代数》

69. 设 n 阶实方阵

$$C=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & \cdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}, T=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

多项式

$$f(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_{n-2}\lambda^{n-2}+a_{n-1}\lambda^{n-1}.$$

(1) 证明: $C=f(T)$.

(2) 证明: T 可以相似对角化, 从而 C 也可以相似对角化.

(3) 求 C 的所有特征根. (2017年华中师范大学)

70. 设 σ 为 n 维线性空间 V 上的线性变换, 并且

$$V_1=\left\{x\in V \mid \text{存在正数数} m \text{ 使得} \sigma^m x=0\right\}, V_2=\bigcap_{i=1}^{\infty}\sigma^i V.$$

证明:

(1) V_1, V_2 都是 σ 的不变子空间.

(2) $V=V_1\oplus V_2$. (2010年兰州大学)

71. $f(x)$ 是数域 P 上的 m 维线性空间 U 到 n 维线性空间 V 的线性映射(即保持线性运算的映射). 证明:

$$\dim(f(U))=m-\dim\left(f^{-1}(0)\right)$$

其中, $f(U)=\{f(\alpha)|\alpha\in V\}, f^{-1}(0)=\{\alpha\in U|f(\alpha)=0\}$. (2011年兰州大学)

72. 设 A 是数域 P 上的 n 级矩阵, 其特征多项式 $f(\lambda)$ 可分解为一次因式的乘积

$$f(\lambda)=\left(\lambda-\lambda_1\right)^{\gamma_1}\left(\lambda-\lambda_2\right)^{\gamma_2}\cdots\left(\lambda-\lambda_s\right)^{\gamma_s}$$

证明: $P^n=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$, 其中 $V_i=\left\{\alpha\in P^n \mid \left(A-\lambda_i E\right)^{r_i}\alpha=0\right\}, i=1,2,\cdots,s$.

73. 设 P^n 是数域 P 上所有 n 维列向量作成的线性空间, U, V 是 P^n 的真子空间, $P^n=U\oplus V$. 证明存在唯一的幂等变换 f (即$f^2=f$), 使得 $f\left(P^n\right)=U, f^{-1}(0)=V$. (2012年兰州大学)

74. 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间, f 是 V 上的线性变换. 证明: f 在某一组基下的矩阵是对角矩阵的充分必要条件是 f 的特征多项式的根都属于 P, 并且对 f 的每一个特征值 λ, 对应的特征子空间 V_λ 的维数等于 λ 的代数重数(即作为特征值的重数). (2012年兰州大学)

75. 设 V 是数域 P 上一有限维线性空间, σ 是 V 上一线性变换. 显然

$$\operatorname{Ker}\sigma=\{\alpha\in V|\sigma(\alpha)=0\} \text{ 和 } \operatorname{Im}\sigma=\{\sigma(\alpha)|\alpha\in V\}$$

厦门大学《高等代数》

都是 V 的子空间, 证明: $\dim(\operatorname{Ker}\sigma)+\dim(\operatorname{Im}\sigma)=\dim(V)$; 并问是否有 $\operatorname{Ker}\sigma\cap\operatorname{Im}\sigma=\{0\}$? (2013年兰州大学)

76. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一秩为 n 的二次型, 符号差为 s. 证明: 存在 $\mathbb{R}^n$ 的一个 $\frac{1}{2}(n-|s|)$ 维子空间 V_1 使得对任一 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in V_1$, 都有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$. (2013年兰州大学)

77. 设 P 是一个数域, $V\in P^{n\times n}$ 是 P 上所有 n 级矩阵构成的 P 上的线性空间, f 是 V 上的线性变换. 证明: 若 f 保持矩阵的乘法运算, 即: 对任意 $A,B\in V, f(AB)=f(A)f(B)$, 则存在 n 级可逆矩阵 Q 使得对任意 $X\in V$, 有 $f(X)=Q^{-1}XQ$. (2013年兰州大学)

78. 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间, σ 是 V 的线性变换, $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 是 σ 的互不相同的特征值, $V_1,V_2,\cdots,V_k$ 是对应的特征子空间, 且 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_k, W$ 是 V 的 σ - 不变子空间. 证明:

$$W=(W\cap V_1)\oplus(W\cap V_2)\oplus\cdots\oplus(W\cap V_k).$$

(2014年兰州大学)

79. 设 V 是复数域上的 n 维线性空间, σ,τ 是 V 的线性变换, 且 $\sigma\tau=\tau\sigma$. 证明:
(1)如果 λ 是 σ 的特征值, 那么 σ 的特征子空间 V_λ 是 τ 的不变子空间;
(2) σ,τ 至少有一个公共的特征向量. (2015年兰州大学)

80. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基, A 是 $n\times s$ 矩阵,

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$$

证明: $L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$ 的维数等于 A 的秩. (2016年兰州大学)

81. 设 A,B 都是 n 阶复矩阵. 证明: 如果 A 与 B 乘积可交换, 那么存在 n 阶可逆复矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 都是上三角矩阵. (2016年兰州大学)

82. 设 V_1,V_2 是数域 P 上线性空间 V 的两个有限维子空间. 证明

$$\dim(V_1)+\dim(V_2)=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2).$$

(2017年兰州大学)

83. 设 V 是实数域上的 n 维线性空间. 证明: V 上的任一线性变换 σ 必有一个1维不变子空间或者2维不变子空间. (2017年兰州大学)

84. 已知矩阵 $A_{n\times m},B_{m\times s}$ 分别是复数域 $\mathbb{C}$ 上的 $n\times m$ 与 $m\times s$ 矩阵, 记 $N(A)=\left\{X\in\mathbb{C}^{m\times 1}|AX=0\right\}$. $R(B)=\left\{BX|X\in\mathbb{C}^{s\times 1}\right\}$.
(1) 设 V 为 $N(A)\cap R(B)$ 在 $R(B)$ 中的补空间, 证明 $\mathrm{r}(AB)=\dim V$.
(2) 证明 $\mathrm{r}(AB)=\mathrm{r}(B)-\dim[N(A)\cap R(B)]$. (2018年兰州大学)

厦门大学《高等代数》

85. V 是复数域 C 上的线性空间，$\mathscr{A}$ 是空间 V 上的线性变换，$f(\lambda)$ 是 $\mathscr{A}$ 的特征多项式, 且 $f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_\gamma}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$, 其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是 $\mathscr{A}$ 的 s 个互异特征值. 则

$$V=\operatorname{Ker}(\mathscr{A}-\lambda_1\mathscr{E})^{r_1}\oplus\operatorname{Ker}(\mathscr{A}-\lambda_2\mathscr{E})^{r_2}\oplus\cdots\oplus\operatorname{Ker}(\mathscr{A}-\lambda_s\mathscr{E})^{r_s}.$$

(2018年兰州大学)

86. 设 $\mathscr{A}$ 是有限维线性空间 V 的线性变换，W 是 V 的子空间，$\mathscr{A}W$ 表示 W 中向量的像组成的子空间. 证明

$$\dim\mathscr{A}W+\dim\left(\mathscr{A}^{-1}(0)\cap W\right)=\dim W.$$

(2018年兰州大学)

87. 证明以下问题

1. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维线性空间 V 上的一组基, A 是 $n\times s$ 矩阵, 且 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$. 证明 ;$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 生成的子空间 $L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$ 的维数等于 A 的秩.

2.已知 A,B,C,D 为 n 阶矩阵, $|A|\neq 0, AC=CA$, 证明: $\begin{vmatrix} A & C\\ C & D\end{vmatrix}=|AD-CB|$. (2019年兰州大学)

88. 已知 $\mathscr{A}$ 为 n 维线性空间 V 上的线性变换, 证明: $\dim(\mathscr{A}V)+\dim\left(\mathscr{A}^{-1}(0)\right)=n$. (2019 年兰州大学)

89. (15 分)

(1) 令 σ 为 n 维线性空间 V 的线性变换, $f(\lambda)$ 为 σ 的最小多项式. 证明: 如果 $f(\lambda)=g(\lambda)h(\lambda)$ 且 $g(\lambda)$ 与 $h(\lambda)$ 互素, 则 $V=L_1\oplus L_2$, 其中

$$L_1=\{\alpha\in V|g(\sigma)\alpha=0\}, L_2=\{\alpha\in V|h(\sigma)\alpha=0\}$$

(2) 设3维线性空间 V 的线性变换 σ 在一组基 e_1,e_2,e_3 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. 求 σ 的最小多项式 $f(\lambda)$, 并对于 $f(\lambda)$ 的一次因式方幂的分解式将 V 分解为直和形式. (2019年兰州大学)

90. 设 A 为 n 阶复矩阵. 证明: 存在一个 n 维向量 α, 使得 $\alpha,A\alpha,\cdots,A^{n-1}\alpha$ 线性无关的充分必要条件是 A 的每一个特征根恰有一个线性无关的特征向量. (2009年南京大学)

91. 设 V_1,V_2 是 n 维欧氏空间 V 的子空间, 且 V_1 的维数小于 V_2 的维数. 证明: 存在 $0\neq\alpha\in V_2$ 使得 $\alpha\perp V_1$.

92. 设 V 是一个 n 维线性空间, V_1 是一个 r 维子空间, $r\leqslant\frac{n}{2}$, 证明: 存在一个线性变换 $\mathscr{A}$, 使得

$$V_1=\mathscr{A}^{-1}(0)\subseteq\mathscr{A}V.$$

(2013年南京大学)

厦门大学《高等代数》

93. 设 $\mathbb{C}[x]$ 是由所有复系数多项式所构成的集合，$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，令 $V=\{f(A)|f(x)\in\mathbb{C}[x]\}$，设 A 的最小多项式的次数为 m, 证明:

(1) V 是一个有限维线性空间;

(2) $E,A,A^2,\cdots,A^{m-1}$ 构成 V 的一组基. (2008年南京师范大学)

94. 设 V 是数域 P 上的有限维线性空间, $\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换，$f(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$ 是 $\mathscr{A}$ 的最小多项式再设 $V_k=\mathrm{Ker}(k\varepsilon-\mathscr{A})^k(k=1,2)$. 其中 $\mathrm{Ker}(*)$ 表示核空间. 证明: $V=V_1\oplus V_2$. (2008年南京师范大学)

95. 设 V_1 与 V_2 分别是齐次方程组 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 与 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 的解空间。证明: $P^n=V_1\oplus V_2$. (2011年南京师范大学)

96. (20 分) 设$A=\begin{pmatrix}3&1&0\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}$，令$V=\{B|AB=BA,B$ 为实方阵$\}$.

(1) 证明 V 是实数域上的线性空间;

(2) 求 V 的一组基. (2012年南京师范大学)

97. 设 V 为有限维欧氏空间, s 个单位向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 组成 V 中的一个正交向量组, 使得对任意的 $\alpha\in V$, 都有 $\sum_{i=1}^{s}(\alpha,\alpha_i)^2=|\alpha|^2$. 证明: $V=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$. (2014年南京师范大学)

98. 设 V 为一个有限维线性空间, $\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换, 证明: $V=\mathscr{A}V\oplus\mathscr{A}^{-1}(0)$ 当且仅当 $\mathscr{A}^2V=\mathscr{A}V$. (2016年南京师范大学)

99. 证明: n 维线性空间 V 的任意真子空间可表示为若干个 $n-1$ 维子空间的交. (2017年南京师范大学)

100.)设 V 为数域 P 上的 n 维线性空间, V_1 , V_2 是 V 的子空间, $V=V_1\oplus V_2$, $\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换. 证明: $\mathscr{A}$ 是可逆的当且仅当 $V=\mathscr{A}(V_1)\oplus\mathscr{A}(V_2)$. (2007年南开大学)

101. (20 分)设V 为数域P 上的有限维线性空间, 对于V 中m 个向量组成的向量组$S=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$, 定义 $P^{m\times1}$ 中的集合

$$W_S=\left\{(\overline{a_1,\alpha_2},\cdots,a_m)'\,|a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_m\alpha_m=0,a_i\in P\right\}$$

(1) 证明: W_S 为 $P_1^{m\times1}$ 的线性子空间;

(2) 设 $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$, $S'=\{\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_m'\}$ 为两向量组, 证明: 存在 V 中线性变换 τ 使得 $\tau(\bar{\alpha}_i)=\alpha_i',(i=1,2,\cdots,m)$ 的充要条件是 $W_S=W_{S'}$. (2007年南开大学)

102. 设 V 为数域 P 上的 n 维线性空间，$\mathscr{A}$ 为 V 上的线性变换, 且 $\mathscr{A}$ 的秩为1. 证明: 如果 $\mathscr{A}$ 不可对角化，则必是幂零的. (2009年南开大学)

103. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关, 而 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{m+1}$ 线性相关, 证明 α_1 不能由 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{m+1}$ 线性表出. (2012年南开大学)

厦门大学《高等代数》

104. 设 A 为对称矩阵, 存在线性无关的向量 X_1, X_2 使 $X_1'AX_1 > 0, X_2'AX_2 < 0$, 证明：存在线性无关的向量 X_3, X_4 使 X_1, X_2, X_3, X_4 线性相关, 且 $X_3'AX_3 = X_4'AX_4 = 0$. (2014 年南开大学)

105. 设 σ, τ 为线性变换且 σ 有 n 个不同的特征值. 证明: 若 $\sigma\tau = \tau\sigma$, 则 τ 可由 $I, \sigma, \sigma^2, \cdots, \sigma^{n-1}$ 线性表出, 其中 I 为恒等变换. (2014年南开大学)

106. V_1, V_2 为 n 维欧氏空间 V 的线性子空间, 且 V_2 的维数大于 V_1 的维数, 证明: V_2 中存在一个向量与 V_1 中的任何一个向量都正交. (2016年南开大学)

107. 非零向量 α_1 是 n 级矩阵 A 的属于特征值 λ 的特征向量, 且向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 满足 $(A - \lambda E)\alpha_{i+1} = \alpha_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m-1), E$ 为 n 级单位矩阵, 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关. (2018年南开大学)

108. $P^{n\times n}$ 是数域 P 上所有 $n\times n$ 矩阵组成的线性空间, 令 $V_1 = \{A \in P^{n\times n} | A' = A\}$, $V_2 = \{A \in P^{n\times n} | A' = -A\}$, 证明:

(1) V_1, V_2 都是 $P^{n\times n}$ 的线性子空间.

(2) $P^{n\times n} = V_1 \oplus V_2$ (2018年南开大学)

109. 已知 $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 且 W_1, W_2 分别是 A_1, A_2 的行列量组生成的 $\mathbb{R}^{1\times n}$ 的子空间, V_1, V_2 分别是 A_1, A_2 的列向量组生成的 $\mathbb{R}^{m\times 1}$ 的子空间, 证明: $W_1 \cap W_2 = 0$ 的充要条件是 $V_1 \cap V_2 = 0$. (2019年南开大学)

110. V 为 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间, 且 U, W 为 V 的子空间, 证明:

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim W + \dim U.$$

(2009年上海大学)

111. $\mathbb{R}$ 为实数域, $\mathscr{A}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换, 且 $\mathscr{A}$ 在 $\mathbb{R}^3$ 基: $e_1 = (0, 0, 1), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (1, 0, 0)$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

证明:

(1) 若 $W_1 = L(e_1, e_2)$, 则 W_1 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

(2) 不存在 $\mathscr{A}$ 的不变子空间 W_2, 使 $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$ (2009年上海大学)

112. (10 分) 设A, B 是数域$\mathbb{F}$ 上n 阶方阵, 且$AB = 0, A + B$ 可逆. 如果$V = \{\alpha \in \mathbb{F}^n | A\alpha = 0\}, W = \{A\alpha | \alpha \in \mathbb{F}\}$, 求证:

$$V \oplus W = \mathbb{F}^n.$$

(2011年上海大学)

厦门大学《高等代数》

113. P 是数域, $P^{n\times n}$ 关于矩阵加法和数乘矩阵构成线性空间, $V_1=\{A|A\in P^{n\times n},A'=A\}$.

(1) 证明: V 是 $P^{n\times n}$ 的子空间;

(2) 求 $P^{n\times n}$ 的子空间 V_2, 使 $P^{n\times n}=V_1\oplus V_2$. (2014年上海大学)

114. 设 A,B,C,D 为 n 阶实对称矩阵, 且两两交换, 并满足 $AC+BD=I$, 如果 $V=\{x\in\mathbb{R}^{n\times n}|ABX=0\}$, $V_1=\{x\in\mathbb{R}^{n\times n}|BX=0\}$, $V_2=\{x\in\mathbb{R}^{n\times n}|AX=0\}$, 求证:

$$V=V_1\oplus V_2.$$

(2015年上海大学)

115. 设 V 为数域 F 上的 n 维线性空间, $\mathscr{A}$ 为 V 上的线性变换满足 $\mathscr{A}^3-2\mathscr{A}^2-\mathscr{A}=-2id$, 其中 id 为 V 上恒等变换.

(1) $\mathscr{A}$ 是否可对角化, 若是, 请证明.

(2) 令 $V_1=\{(\mathscr{A}-2id)v|v\in V\},V_2=\left\{\left(\mathscr{A}^2-id\right)v|v\in V\right\}$. 证明: $V=V_1\oplus V_2$. (2016年上海大学)

116. 设 $\mathscr{A}$ 为 n 维复线性空间 V 上的线性变换, 证明对任意正整数 $r,1\le r\le n$, 在 V 中均存在一个 r 维 $\mathscr{A}-$ 不变子空间. (2009年上海大学)

117. V 是数域 F 上的 n 维线性空间， $\mathscr{A}$ 为 V 上的线性变换. 若 $\mathscr{A}$ 在 V 的某组基下矩阵为对角形，证明: $\mathscr{A}$ 的任一不变子空间 V' 也存在某组基, 使 $\mathscr{A}|V'$ 在该组基下的矩阵为对角阵. (2011年上海交通大学)

118. 设线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 满足 $\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$, 证明:

(1) $\beta\in\operatorname{Im}\mathscr{A}$ 当且仅当 $\mathscr{A}\beta=\beta$:

(2) $V=\operatorname{Im}\mathscr{A}\oplus\ker\mathscr{A}$. (2013年上海交通大学)

119. 用 R 表示实数域,定义 R^n 到 R 的映射 f 如下:

$$f(X)=|x_1|+\cdots+|x_r|-|x_{r+1}|-\cdots-|x_{r+s}|,\forall X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'\in R^n$$

其中 $r\ge s\ge 0$. 证明:

(1) 存在 R^n 的一个 $n-r$ 维子空间 W, 使得 $f(X)=0,\forall X\in W$

(2) 若 W_1,W_2 是 R^n 的两个 $n-r$ 维子空间, 且满足

$$f(X)=0,\forall X\in W_1\cup W_2$$

则一定有 $\dim(W_1\cap W_2)\ge n-(r+s)$. (2013年上海交通大学)

120. (15 分) 设V 是数域P 上n 维线性空间, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in V,W=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$, 又有$\beta_1,\beta_2\in W$ 且 β_1,β_2 线性无关. 求证: 可用 β_1,β_2 替换 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 中的两个向量 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2}$, 使得剩下的两个向量 $\alpha_{i_3},\alpha_{i_4}$ 与 β_1,β_2 仍然生成子空间 W, 也即 $W=L(\beta_1,\beta_2,\alpha_{i_3},\alpha_{i_4})$. (2015年上海交通大学)

厦门大学《高等代数》

121. 设 V 是复数域 C 上 n 维线性空间, $\mathscr{A}$ 是 V 的一个线性变换. 设 $\mathscr{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵记为 A_C. 另一方面，V 关于向量加法以及实数的数乘构成实数域 $\mathbb{R}$ 上 $2n$ 维线性空间, 记为 V_R, 分也为 V_R 的一个线性变换. 设 $\mathscr{A}$ 在 V_R 的某组基下的矩阵记为 A_R, 证明: $|A_R| = |A_C|^2$. (2019 年上海交通大学)

122. 设 A, B 分别为数域 K 上的 $m \times n, n \times m$ 矩阵, E_m 为 m 阶单位矩阵, $AB = E_m, m \leq n$. 证明: B 的列向量可以扩充成 K 上 n 维列向量空间 K^n 的一组基. (2009年首都师范大学)

123. 设 V_1, V_2 为有限维向量空间 V 的两个线性子空间, $V_1 + V_2, V_1 \cap V_2$ 分别是它们的和空间与交空间, $\dim V_1, \dim V_2, \dim(V_1 + V_2), \dim(V_1 \cap V_2)$ 分别为 $V_1, V_2, V_1 + V_2, V_1 \cap V_2$ 的维数, 证明:

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$$

(2009年首都师范大学)

124. 设 B 为 n 阶可逆矩阵,

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

为 m 阶矩阵, V 为 m 维线性空间, $\mathscr{A}$ 为 V 上的线性变换, 对应矩阵为 A. 证明:

$$\mathscr{A}^2 V = \mathscr{A} V, \ker \mathscr{A} = \ker \mathscr{A}^2, V = \mathscr{A} V \oplus \ker \mathscr{A}$$

(2010年首都师范大学)

125. 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

为实矩阵, $V = \mathbb{R}^n, W = \mathbb{R}^m$ 分别为通常的 n, m 维实列向量空间. 映射 $f: V \to W$ 定义为: 任给 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in V$, 有 $f(X) = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$, 其中 $y_i = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i x_i, i = 1, 2, \cdots, m$, 记

$$\operatorname{Im} f = \{f(X) | X \in V\}$$

和

$$\ker f = \{X \in V | f(X) = 0\}$$

非别是 f 的象和核，证明:

(1) 对 $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T \in W$, 方程 $AX = b$ 有解的充要条件是 $b \in \operatorname{Im} f$;

(2) Im f 是 W 的子空间, 则 $\ker f$ 是 V 的子空间;

(3) $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = n$, 其中 dim 是维数. (2011 年首都师范大学)

厦门大学《高等代数》

126. 设 T 为 n 阶实方阵, E 为 n 阶单位矩阵, $T^2=E$, 证明: 任给 n 维实列向量 α 都存在唯一的 n 维实列向量 β,γ 使得 $\alpha=\beta+\gamma$ 且 $T\beta=\beta, T\gamma=-\gamma$. (2011年首都师范大学)

127. 设 V 为 n 维欧氏空间, $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$ 是 V 中的 $n+1$ 个非零向量, 证明: V 中存在非零向量 α 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$ 都不正交. (2011年首都师范大学)

128. 设 V 为有理数域上的线性空间, A 为 V 的一个非零线性变换, 且

$$A^4=4A^2-2A$$

证明: $V=AV\oplus A^{-1}(0)$, 且 A 有一个3维不变子空间. (2012 年首都师范大学)

129. 设 $\mathscr{A}$ 是有限维线性空间 V 上的线性变换, 已知存在正整数 k 便得 $\operatorname{ker}\left(\mathscr{A}^k\right)=\operatorname{ker}\left(\mathscr{A}^{k+1}\right)$. 证明:

$$\operatorname{ker}\left(\mathscr{A}^k\right)\cap\operatorname{Im}\left(\mathscr{A}^k\right)=0$$

(其中 $\operatorname{ker}\left(\mathscr{A}^k\right),\operatorname{Im}\left(\mathscr{A}^k\right)$ 分别为线性变换 $\mathscr{A}^k$ 的核空间和象空间). (2013年首都师范大学)

130. (15 分) 设$\mathscr{A},\mathscr{B}$ 为n 维实向量空间V 到自身的线性映射, 且$\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$, 记$V_1=\operatorname{ker}(\mathscr{A})$($\mathscr{A}$ 的核) $V_2=\operatorname{Im}(\mathscr{A})$($\mathscr{A}$ 的像), 证明: $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$ 当且仅当 $\mathscr{B}(V_1)\subset V_1$, 且 $\mathscr{B}(V_2)\subset V_2$. (2014年首都师范大学)

131. 记 $M_5(\mathbb{R})$ 为所有5阶实方阵组成的线性空间. 令

$$T=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

令 $S=\{A\in M_5(\mathbb{R})|AT=TA\}$. 证明: S 是 $M_5(\mathbb{R})$ 的线性子空间, 并计算它的维数. (2015 年首都师范大学)

132. 设 $v_1,\cdots,v_m$ 为线性相关的 n 维实向量, 其中每个分量都是有理数, 证明: 存在不全为零的有理数 $r_1,\cdots,r_m$ 使得

$$r_1v_1+\cdots+r_mv_m=0$$

(2015年首都师范大学)

133. 设 v_1,v_2,v_3,v_4,v_5 为任意5 个3 维向量. 令

$$W=\left\{(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)\in\mathbb{R}^5|a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+a_4v_4+a_5v_5=0\right\}$$

证明 W 是 $\mathbb{R}^5$ 的线性子空间, 并给出 W 的所有可能的维数. (2016年首都师范大学)

厦门大学《高等代数》

134. 设 $\mathscr{A}$ 为 n 维向量空间 V 到自身的线性变换, 满足 $\mathscr{A}^3=\mathscr{A}$. 证明任意向量 $v\in V$ 可以唯一地分解为

$$v=v_1+v_0+v_{-1}$$

其中 v_1,v_0,v_{-1} 分别满足 $\mathscr{A}v_1=v_1,\mathscr{A}v_0=0,\mathscr{A}v_{-1}=-v_{-1}$. (2016年首都师范大学)

135. 设A的秩$r(A)=r$，设$V=\{X\in\mathbb{R}^n|X'AX=0\}$. 证明：V包含$\mathbb{R}^n$ 的一个维数为$n-r$的子空间.V是$\mathbb{R}^n$的子空间吗？说明你的理由. (2010年四川大学)

136. 设$A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$，设$C(A)$ 是所有与A可交换的实矩阵组成的集合.

（1）证明：$C(A)$ 是实数域上的线性空间.

（1）求$C(A)$ 的维数和一个基.(2010年四川大学)

137. 设V是数域$\mathbb{F}$ 上的线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\in V$.令$W=\{\sum\limits_{i=1}^{s}k_i\alpha_i|k_i\in\mathbb{F}\}$.证明：W是V的子空间.(2011年四川大学)

138. 设F，K都是数域且$F\subseteq K$.

（1）设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是F上的n维列向量.证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 在F上线性相关当且仅当$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$在K上线性相关.

（2）证明：关于数的乘法和加法K是F上的线性空间.(2011年四川大学)

139. 设F是数域，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\in F^n$ 是线性无关的列向量，A是F上的m阶方阵.令

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)A.$$

证明：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 生成的F^n 的子空间V的维数$dimV$ 等于A的秩$r(A)$.(2013年四川大学)

140. 设A是n阶复方阵，设$r(A)=r(A^2)=r$.设$U=\{Y\in M_n|$存在$X\in M_n$使得$AX=Y\},V=\{Z\in M_n|AZ=0\}$ 分别求线性空间U，V的维数$dimU,dimV$.问$M_n=U\bigoplus V$ 是否成立？说明理由. (2014年四川大学)

141. 设A是数域F上的$s\times n$ 型实矩阵.设

$$V_1=\{X\in F^n|A'AX=X\},V_2=\{Y\in F^s|AA'Y=Y\}.$$

证明：V_1,V_2 分别是F^n,F^s 的子空间，且有线性空间同构：$V_1\cong V_2$. (2019年四川大学)

142. 设V是数域F上的n维线性空间，$W_1,W_2,\cdots,W_s$ 为V的s个子空间，

$$W=W_1\bigcup W_2\bigcup\cdots\bigcup W_s.$$

证明：W为V的子空间的充分必要条件是存在某个i使得$W=W_i$.(2010年武汉大学)

厦门大学《高等代数》

143. 已知m个向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，但其中任意$m-1$ 个线性向量都线性无关.证明：

1.若$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$ ，则系数$k_1,k_2,\cdots,k_m$ 或者全为0，或者全不为0;

2.若$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_m\alpha_m=0$ ，且$b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\cdots+b_m\alpha_m=0$ ，其中$b_1\neq 0$ ，则

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_m}{b_m}.$$

(2011年武汉大学)

144. 设$M_n(K)$ 表示数域K上n阶方阵全体构成的线性空间，$A\in M_n(K)$ ，用$C(A)$ 表示$M_n(K)$ 中所有与A可交换的矩阵构成的集合.

1.证明：$C(A)$ 是$M_n(K)$ 的一个线性子空间.

2.证明：如果A有n个不同的特征值，那么$dimC(A)=n$.(2013年武汉大学)

145. 有$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1}$ ，且$\beta_i=\alpha_i+t_i\alpha_{s+1},i=1,2,\cdots,s$ ，证明如果$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1}$ 必定线性无关. (2014年武汉大学)

146. 线性空间V定义的第（3），（4）条公理，即

（3）任意$\alpha\in V$ ，存在$0\in V$ ，使$\alpha+0=0+\alpha=\alpha$;

（4）任意$\alpha\in V$ ，存在$\beta\in V$ ，使$\alpha+\beta=\beta+\alpha=0$.

证明它们等价的条件为$\forall\alpha,\beta\in V,\exists x\in V$ ，使得$\alpha+x=\beta$.(2014年武汉大学)

147. 设$sl_n(F)$ 是$M(F)$ 上A，B矩阵满足$AB-BA$ 生成的子空间，证明：

$$dim(sl_n(F))=n^2-1.$$

(2014年武汉大学)

148. 向量组$(I):\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，且可以由向量组$(II):\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出.证明：

1.$r\leq s$;

2.必要时对向量组(II) 重新编号，再用向量组(I) 替换向量组(II) 的前r个向量，得到的向量组(III) : $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_s$ 与向量组(II) 等价. (2017年武汉大学)

149. 证明维数公式：

$$dimW_1+dimW_2=dim(W_1+W_2)+dim(W_1\bigcap W_2).$$

(2017年武汉大学)

150. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(\alpha_1\neq 0)$ 线性相关，证明：存在正整数$i:1<i\leq s$ ，使得向量α_i 可以由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1}$ 线性表出，且表示法唯一. (2017年武汉大学)

151. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是线性空间V的一组基.

（1）证明$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\beta_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ 也是V的一组基.

（2）设γ 在前一组基下的坐标是$(4,3,2,1)$ ，求γ 在后一组基下的坐标. (2010年湘潭大学)

厦门大学《高等代数》

152. 设向量组$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关，及向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.证明：向量β 可以由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 唯一线性表示. (2012年湘潭大学)

153. 设n为奇数，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为n维列向量组.证明：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关当且仅当向量组

$$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}+\alpha_n,\alpha_n+\alpha_1$$

线性无关. (2013年湘潭大学)

154. 令$\mathbb{R}^{n\times n}$ 表示实数域上全体n阶矩阵所组成的线性空间，令

$$V_1=\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}|A=A'\},$$

其中A' 表示矩阵A的转置矩阵.

（1）证明：V_1 为$\mathbb{R}^{n\times n}$ 的子空间.

（2）求$\mathbb{R}^{n\times n}$ 的子空间V_2 使得$\mathbb{R}^{n\times n}=V_1\bigoplus V_2$.(2014年湘潭大学)

155. 已知向量β 可以由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示，但是不能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表示，证明向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\beta$ 等价. (2018年湘潭大学)

156. 设$V=P^{2\times2}$ （V是数域P上所有二阶方阵构成的线性空间），$A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}\in V$ ，且$W=\{X|AX=XA,X\in V\}$.

（1）证明W是V的子空间;

（2）求W的维数;

（3）求V的一个线性变换σ 使得$\sigma(V)=W$.(2010年云南大学)

157. 设$\mathbb{R}^+$ 是全体正实数的集合，$\mathbb{R}$ 是实数域，任取$a,b\in\mathbb{R}^+,m\in\mathbb{R}$ ，加法和数量乘法定义为：$a\oplus b=ab,m\circ a=a^m$.则$\mathbb{R}^+$ 构成实数域上的线性空间，求它的维数和一组基. (2011年云南大学)

158. 设向量β 可以经向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出.证明：β 在向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 下的表示法唯一的充要条件是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关. (2012年云南大学)

159. 设线性空间V由全体n阶实矩阵所组成，V_1 是全体实对称矩阵所组成的子空间，V_2 为全体实反对称矩阵所组成的子空间，证明：$V=V_1\oplus V_2$.(2016年云南大学)

160. 令V和W是域K上的线性空间，$Hom_K(V,W)$ 表示V到W所有线性映射组成的线性空间.证明：对$Hom_K(V,W)$ ，若$Imf\cap Img=\{0\}$ ，则f 和g 在$Hom_K(V,W)$ 中是线性无关的. (2012年浙江大学)

161. 令线性空间$V=Imf\ominus W$ ，其中W是V的线性变换f 的不变子空间.

（1）证明：$W\subseteq kerf$;

（2）证明若V是有限维线性空间，则$W=kerf$;

（3）举例说明，当V是无限维的，可能有$W\subseteq kerf$ ，且$W\neq kerf$.(2012年浙江大学)

厦门大学《高等代数》

162. 设

$$A=\begin{pmatrix}0 & E_n\\ E_n & 0\end{pmatrix}, L=\{B\in M_{2n}(\mathbb{R})|AB=BA\}.$$

证明L为$M_{2n}(\mathbb{R})$ 的子空间并计算其维数. (2014年浙江大学)

163. 线性空间上$(a_1,a_2,\cdots,a_s)$ 与$(b_1,b_2,\cdots,b_t)$ 是两个线性无关向量组，$a_1,a_2,\cdots,a_s)=(b_1,b_2,\cdots,b_t)A$ ，证明

$$n-t-r(A)\le s\le min\{r(A),t\}.$$

(2015年浙江大学)

164. 设有限维线性空间V有两个非平凡的子空间V_1,V_2 使得$V=V_1\oplus V_2$ ，W为V的任意子空间.证明

（1）$(W\cap V_1)+(W\cap V_2)$ 是W的子空间，W是$(W+V_1)\cap(W+V_2)$ 的子空间.

（2）商空间$W/(W\cap V_1+W\cap V_2)$ 的维数等于商空间$((W+V_1)\cap(W+V_2))/W$ 的维数.

（3）利用上述结论证明$W=(W\cap V_1)\oplus(W\cap V_2)$ 的充要条件是$W=(W+V_1)\cap(W+V_2)$.(2016年浙江大学)

165. 已知n阶矩阵$A=(a_{ij})$ 的秩为r，证明在F^{2n-r} 中存在n个线性无关的向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ ，在F^{2n-r} 的对偶空间中存在n个线性无关的向量$f_1,f_2,\cdots,f_n$ ，使得$f_j(\alpha_i)=a_{ij}$.(2017年浙江大学)

166. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是线性空间V中4个线性无关的向量，求向量组$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$ 的秩. (2010年中科大)

167. 已知W_1,W_2 是数域F上n维线性空间V的两个子空间.求证：

$$dim(W_1\cap W_2)+dim(W_1+W_2)=dimW_1+dimW_2.$$

(2012年中科大)

168. 设V是实数域上的线性空间，V中的向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{2014}\}$ 线性无关，求向量组$\{\alpha_i+\alpha_j|1\le i<j\le 2014\}$ 的秩. (2014年中科大)

169. 设V是n维线性空间,V_1,V_2 是V的子空间,且

$$dim(V_1+V_2)=dim(V_1\cap V_2)+1.$$

求证:$V_1+V_2=V_1,V_1\cap V_2=V_2$ 或者$V_1+V_2=V_2,V_1\cap V_2=V_1$.(2016年国科大)

170. 设$f_i,i=1,2,\cdots,m(m<n)$ 是一个n维线性空间V上的m个线性函数,即$f_i(a\alpha+b\beta)=af_i(\alpha)+bf_i(\beta)$.证明:存在一个非零向量$\alpha\in V$,使得$f_i(\alpha)=0$. (2016年国科大)

171. 若n维线性空间V有两个子空间V_1,V_2 ,维数$dimU_1\le m,dimU_2\le m,m<n$.证明:V中存在子空间W,且$dimW=n-m$,满足$W\cap U_1=W\cap U_2=\{0\}$. (2017年国科大)

厦门大学《高等代数》

172. 设A是n阶复矩阵,且$A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}$,令$V_1=\{x\in\mathbb{C}^n|A_1x=0\},V_2=\{x\in\mathbb{C}^n|A_2x=0\}$,证明:矩阵A可逆的充要条件是向量空间$\mathbb{C}^n$ 能够表示成子空间V_1 与V_2 的直和. (2018年国科大)

173. 设V是由次数不超过n的一元实系数多项式构成的实线性空间,对每个自然数$k\geq 0$,定义

$$\binom{x}{k}=\frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k},\binom{x}{0}=1.$$

(1)证明$\binom{x}{0},\binom{x}{1},\cdots,\binom{x}{n}$ 构成V的一组基.

(2)让给一个多项式$f(x)=a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$,写出$f(x)$ 相对于(1)这组基的线性组合.

(3)证明若$f(i)\in\mathbb{Z}$,其中$i=1,2,\cdots,n$,则对任意的$k\in\mathbb{Z}$,都有$f(k)\in\mathbb{Z}$.(2019年国科大)

174. 设$\mathbb{C}[x]_n$ 是复数域上次数小于$n(n\geq 2)$ 的所有多项式再添上零多项式所成的线性空间,$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为全体n次单位根.令

$$f_i(x)=(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\cdots(x-\varepsilon_{i-1})(x-\varepsilon_{i+1})\cdots(x-\varepsilon_n),i=1,2,\cdots,n.$$

(1)证明:$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 是$\mathbb{C}[x]_n$ 的一组基.

(2)求由基$1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$ 到基$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 的过渡矩阵. (2014年中南大学)

175. 设数域P上的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关,且可由数域P上向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出.证明:在$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 中必然存在r个向量,将它们用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 替换后所得的向量组与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 等价. (2014年中南大学)

176. 证明:向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关$\Leftrightarrow$ 存在β ,使得β 可由该向量组线性表示,但其不可由任意少于s个向量线性表示. (2018年中南大学)

177. 设$U=\{A\in M_2(F):a_{11}+a_{12}=0\},V=\{A\in M_2(F):a_{11}+a_{21}=0\}$,求$U+V$ 的维数. (2010年中山大学)

178. 设$f(x)$ 是数域F上的n次多项式,令$(f)=\{g(x):g\in F[x],f|g\}$,求商空间$F[x]/(f)$ 的维数. (2010年中山大学)

179. 设A为数域F上的$m\times n$ 矩阵,定义

$$L_A:F^n\to F^n,x\mapsto Ax.$$

证明:L_A 是单射当且仅当A的列向量组线性无关;L_A 是满射当且仅当A的行向量组线性无关. (2010年中山大学)

180. 设$S=\{(t,t^2,t^3):t\in\mathbb{R}\}$.证明:$span(S)=\mathbb{R}^3$.(2012年中山大学)

厦门大学《高等代数》

181. 令

$$S=\{AB-BA: A,B\in M_n(F)\}.$$

证明:S张成的子空间$W=span(S)$ 的维数等于n^2-1 ,并且给出它的一个基. (2012年中山大学)

182. 设V是数域F上线性空间,W是V的子空间,V^* 表示V的对偶空间,W^0 表示W的零化子,即$W^0=\{f\in V^*: f(W)=0\}$.证明:$W^*\cong V^*/W^0$.(2012年中山大学)

183. 设E为数域,$F\subset E$ 且E 作为F 上的线性空间,维数为m.设V为E上的n维线性空间.证明:V作为F上的线性空间维数为mn. (2013年中山大学)

五.问答题

1. 一般说来一个向量组的极大线性无关部分组是不唯一的, 那么什么向量组的极大线性无关部分组是唯一的? 证明你的结论. (2009年北京大学)

2. 设V是n线性空间, W是V的非平凡子空间, 简略说明一定存在两个互不相同的非平凡子空间U_1,U_2, 使得

$$V=W\oplus U_1=W\oplus U_2$$

. (2010年湖南师范大学)

3. 一个向量组的任何一个线性无关组是否必可扩充为它的一个极大线性无关组? (2011年湖南师范大学)

4. 设$\mathscr{A}$为数域$\mathscr{F}$上的n维线性空间V上的线性变换, V_1和V_2为V的任意两个子空间, 问

$$\mathscr{A}(V_1\cap V_2)=\mathscr{A}(V_1)\cap\mathscr{A}(V_2)$$

是否成立? (2011年湖南师范大学)

(林秋林 林鹭 整理)

厦门大学《高等代数》