国内部分重点高校硕士研究生入学考试高等代数试题
(双线性型部分)

一. 填空题

1. 设$f(\alpha,\beta)$是数域$\mathbb{P}$上三维线性空间V上的一个双线性函数, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$是$V$的一组基, 矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\2&1&0\end{pmatrix}$$

是$f(\alpha,\beta)$在$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的度量矩阵, 设$\alpha=2\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3,\beta=\varepsilon_1-\varepsilon_2$, 则$f(\alpha,\beta)=$________. (2015年大连理工大学)

二. 选择题

三.计算题

1. 形如$\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}$的$\mathbb{R}$上的矩阵形成一个线性空间$V$, 定义$V\times V\to\mathbb{R}$上的映射为

$$(A,B)=\frac{1}{2}(det(A+B)-det(A)-det(B)).$$

(1)证明这是一个双线性映射.
(2)求其在基$\begin{pmatrix}1&\\&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&\\&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}&1\\1&\end{pmatrix}$下的度量矩阵$M$.
(3)对于上述M,求$f(X)=\frac{X'MX}{X'X}$的最大值与最小值(注：用数学分析方法不给分). (2013年北京大学)

四.证明题

1. 设$f(\alpha,\beta)=g_1(\alpha)g_2(\beta)$是数域$\mathbb{P}$ 上的欧氏空间V上的对称双线性线性函数, 且其中g_1,g_2是线性函数. 证明存在线性函数$h(x)$, 以及$k\neq 0\in\mathbb{P}$使得$f(\alpha,\beta)=kh(\alpha)h(\beta)$. (2012年北京大学)

2. 设$f(X,Y)$为定义在数域P上的n维线性空间V上的一个双线性函数, 证明：

$$f(X,Y)=X'AY=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$$

可以表示为两个线性函数

$$f_1(X)=\sum_{i=1}^{n}b_ix_i,f_2(Y)=\sum_{i=1}^{n}c_iy_i$$

之积的充分必要条件是$f(X,Y)$的度量矩阵A的秩$r(A)\leq 1$. (2009年华南理工大学)

3. 设$f(x,y)$为线性空间V上的非退化双线性函数. 证明: 对于任何$g\in V^*$, 存在唯一的$\alpha\in V$使得$g(\beta)=f(\alpha,\beta),\forall\beta\in V$.

4. 设函数$f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ 为：$f(X,Y)=X'AY,X,Y\in\mathbb{R}^n$.证明：$f$ 不是零函数当且仅当存在$X_0\in\mathbb{R}^n$使得$f(X_0,X_0)\neq 0$.(2010年四川大学)

5. 设$M_n(\mathbb{R})$ 是所有n阶实方阵组成的线性空间，设$(-,-)$ 是$M_n(\mathbb{R})$ 上的双线性型，其定义为：对任意$X,Y\in M_n(\mathbb{R}),(X,Y)=tr(XY)$ ，其中tr表示方阵的迹.
   （1）任取$M_n(\mathbb{R})$ 的一组基：$A_1,A_2,\cdots,A_{n^2}$.证明：存在$M_n(\mathbb{R})$ 的唯一的一组基：$B_1,B_2,\cdots,B_{n^2}$ 使得
   $$(A_i,B_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1,i=j\\0,i\neq j,\end{cases}$$
   称$B_1,B_2,\cdots,B_{n^2}$ 是$A_1,A_2,\cdots,A_{n^2}$ 的对偶基.
   （2）对于$M_n(\mathbb{R})$ 的基$A_1,A_2,\cdots,A_{n^2}$ 和基$A'_1,A'_2,\cdots,A'_{n^2}$ ，设它们的由1给出的对偶基分别为$B_1,B_2,\cdots,B_{n^2}$ 和$B'_1,B'_2,\cdots,B'_{n^2}$ ，证明：$\sum\limits_{i=1}^{n^2}A_iB_i=\sum\limits_{i=1}^{n^2}A'_iB'_i$.(2013年四川大学)
6. 设$f:V\times V\to F$ 是数域F上的线性空间V上的对称双线性型，$dimV=n$.
   （1）证明：存在V的一组基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 使得当$i\neq j$ 时有$f(\alpha_i,\alpha_j)=0$.
   （2）设非退化，即对任意$0\neq\alpha\in V$ 都存在$\beta\in V$ 使得$f(\alpha,\beta)\neq 0$.设$\mathcal{A}$ 是V上的线性变换，满足：对任意$\alpha,\beta\in V$ 都有$f(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\beta)=f(\alpha,\beta)$.证明：$\mathcal{A}$ 是可逆的，并求出$\mathcal{A}$ 在V的基下的矩阵的行列式. (2014年四川大学)

7. 设V是数域F上的n维线性空间，$(,)$ 是V上的一个非退化双线性型，V^* 是V的对偶空间.
   （1）V的子集$W=\{\alpha\in V|(\alpha,\alpha)=0\}$ 是否是V的子空间？说明理由.
   （2）证明：对任意$f\in V^*$ ，都存在唯一的$\alpha\in V$ ，使得$f(\beta)=(\alpha,\beta)$ 对任意$\beta\in V$ 都成立. (2016年四川大学)

8. 设$f(\alpha,\beta)$ 为V上的非退化双线性函数，对$\forall g(x)\in V^*$ ，存在唯一的$\alpha\in V$ ，使得$f(\alpha,\beta)=g(\beta),\forall\beta\in V$.(2014年武汉大学)

9. 定义所有n阶实方阵构成的实线性空间V上的对称双线性函数为$f(X,Y)=tr(X^TY),X,Y\in V$ ，二次型$Q(X)=f(X,X)$.求$Q(X)$ 的正负惯性指数. (2010年中科大)

10. 设V是n维复向量空间,$(-,-):V\times V\to\mathbb{C}$ 是反对称的非退化双线性型,$\varphi:V\to V$ 是一个线性变换,满足$(\varphi(u),\varphi(v))=(u,v),\forall u,v\in V$.证明

(1)V的维数是偶数.

(2)φ 是可逆的线性变换.

(3)若λ 是φ 的特征值,则$\dfrac{1}{\lambda}$ 也是φ 的特征值. (2015年国科大)

11. 设V是实数域上的n阶方阵全体所构成的线性空间,f 是V上的实值非零线性函数,满足

$$\forall A,B\in V,f(AB)=f(BA).$$

证明:$g(A,B)=f(AB)$ 是V上的非退化双线性函数. (2013年中南大学)

12. 设V是数域F上一个n维线性空间,f 是V上的一个双线性函数,令

$$V_1=\{x\in V:f(x,y)=0,\forall y\in V\};;$$

$$V_2=\{x\in V:f(x,y)=0,\forall x\in V\};.$$

证明:V_1,V_2 都是V的子空间,且维数相等. (2014年中山大学)

13. 记$\mathbb{R}_5$ 为次数小于5的实多项式全体构成的向量空间,在$\mathbb{R}_5$ 上定义双线性函数如下

$$(f(x),g(x))=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx.$$

(1)证明:上式定义了$\mathbb{R}_5$ 上一个正定的对称双线性函数;

(2)用Gram-Schmidt方法由$1,x,x^2,x^3$ 求$\mathbb{R}_5$ 的一个正交向量组;

(3)求一个形如$f(x)=a+bx^2-x^4$ 的多项式,使得它与所有次数低于4的实多项式正交. (2015年中山大学)

(林秋林 林鹭 整理)