国内部分重点高校硕士研究生入学考试高等代数试题
(二次型部分)

一. 填空题

1. 如果把n阶实对称矩阵按合同关系分类(即两个n阶实对称矩阵属于同一类, 当且仅当它们合同), 则不类的总数是________. (2009年北京工业大学)

2. 如果二次型$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & a \\ -2 & 8 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$的正负惯性指数之和是2, 则$a=$________. (2009年北京工业大学)

3. 如果二次型$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & a & -1 \\ -3 & 1 & 3-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$是正定二次型, a是整数则$a=$________. (2010年北京工业大学)

4. 二次型$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$的正负惯性指数之和=________. (2011 年北京工业大学)

5. 如果二次型$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ -8 & 2 & 3 \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$的正负惯性指数之和是2, 则$a=$________. (2012年北京工业大学)

6. 如果二次型$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 2a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$的秩是2, 则$a=$________. (2014年北京工业大学)

7. 若实对称矩阵A与矩阵$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$合同且$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$则实二次型$X'AX$的规范型为________. (2015年北京工业大学)

8. 实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+4x_1x_2-4x_2x_3$ 的正惯性系数是________. (2009年北京交通大学)

9. 实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$经过正交变换化为$y_1^2+5y_2^2$, 则A的最小特征值是________. (2009 年北京交通大学)

10. 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-3x_3^2+2x_1x_2$ 的正惯性指数为p, 负惯性指数为q, 则$p-q=$________. (2010年北京交通大学)

11. 已知$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+kx_3^2+6x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$ 的秩为2, 则参数$k=$________. (2010 年北京交通大学)

12. 实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_2^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$ 的符号差为________. (2011年北京交通大学)

13. t取何值时, 4元实二次型

$$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+9x_4^2+2t(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$$

为正定的?________. (2011年北京交通大学)

14. 已知实二次型

$$f=x_1^2+tx_2^2+tx_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

是正定的, 则常数t的取值范围是________. (2012年北京交通大学)

15. 设$f=10x_1^2+2x_2^2+2ax_3^2+8x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3$正定, 则$a$满足的条件是________. (2013 年北京交通大学)

16. 已知实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

经正交变换$X=PY$可化为标准型$f=6y_1^2$, 则$a=$________. (2015年北京交通大学)

17. 当t的取值满足____时, $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 是正定的. (2016年北京交通大学)

18. 设半正定二次型$f(x_1,\cdots,x_n)=X^TAX$的秩为r, 则$f(x_1,\cdots,x_n)=0$的实数解构成$\mathbb{R}^n$的一个______维子空间. (2016年北京交通大学)

19. 设$\alpha=(1,0,1)^T$, $A=\alpha\alpha^T$, 若$B=(kE+A)^2$ 是正定矩阵, 则k满足________. (2017年北京交通大学)

20. 已知实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$$

是正定的, 则t的取值范围是________. (2010 年北京科技大学)

21. 实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$ 的秩是_____, 符号差是_____. (2012年湖南师范大学)

22. 将秩为r的n元实二次型按合同分类, 一共可以分为_____类. (2013年湖南师范大学)

23. 三元实二次型$2x_1^2+x_1x_2-5x_1x_3$的规范型是________. (2014年湖南师范大学)

24. 三元实二次型$2x_1^2+x_1x_2-3x_1x_3$的规范型是________. (2015年湖南师范大学)

25. 设实二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left(x_1,x_2,x_3\right)\begin{pmatrix}1&4&1\\0&1&3\\3&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, 则 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 的矩阵 = ______, 符号差 = ______. (2009年南京大学)

26. 设实二次型 $f\left(x_4,x_2,x_3\right)=\left(x_1,x_2,x_3\right)\begin{pmatrix}0&-1&8\\5&0&-2\\-10&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$. 则这个二次型的矩阵为______, 符号差为______.

27. 设 t 为整数, 且 $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&t&2\\1&2&7-t\end{bmatrix}$ 为正定矩阵, 则 $t=$______. (2010年上海大学)

28. 含参数 t 的矩阵正定, 求 t 的范围______. (2016年上海大学)

二. 选择题

1. 二次型$x^2+2y^2-z^2+4xy-2yz+2zx$的矩阵是(　). (2009 年北京工业大学)

(A)$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&2&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$　　(B$\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&1&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}$)

(C)$\begin{pmatrix}1&2&1&0\\2&2&-1&0\\1&-1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$　　(D)在目前条件下不确定

2. Q是n阶实方阵, 线性方程组$QX=\beta$有唯一解. 若记$A=QQ'$, 则(　). (2010年北京工业大学)

(A)A的特征值一定是正数　　(B)二次型$X'AX$一定是正定二次型

(C)A一定与单位矩阵相似　　(D)A一定与单位矩阵合同

3. 记实矩阵$\begin{pmatrix}1&a^2&a^3\\1&b^2&b^3\\1&c^2&c^3\end{pmatrix}$ 其中$a<b<c$, $A=QQ'$, 则(　). (2011年北京工业大学)

(A)A的特征值一定是正数　　(B)二次型$X'AX$一定是正定二次型

(C)A一定与单位矩阵合同　　(D)$|A|>0$

4. 设E是n(自然数$n\geq 2$)阶单位矩阵, 同阶方阵$A=(a_{ij})$)满足$a_{ii}=2(i=1,2,\cdots,n), a_{k,k+1}, a_{k+1,k}=1(k=1,2,\cdots,n-1)$, 其余元素皆为0. 下列选项中不正确的是(　). (2012年北京工业大学)

(A)A^3+E是正定矩阵　　(B)A^3+E的特征值皆为正数

(C)A^3+E的特征值皆为负数　　(D)行列式$|A^3+E|>0$

5. 设A,C是n阶正定矩阵, 而实矩阵B是矩阵方程$AX+XB=C$ 的唯一解, 则(　). (2015年北京工业大学)

(A)B是正定矩阵　　(B)B是半正定矩阵

(C)B是负定矩阵　　(D)无法确定B的正, 负定性

6. 实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x3$ 经过非退化线性替换$X=CY$可退化成规范型$f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2$, 则a的值为(　). (2015年北京工业大学)

(A)1　　(B)-2

(C)-1　　(D)2

7. 设A,B为两个正定矩阵, 则下列不正确的是(　). (2016年北京工业大学)

(A)$A+B$正定　　(B)AB正定

(C)必存在可逆矩阵Q使得$A=QQ'$　　(D)A,B的特征值为正实数

8. 已知n阶矩阵A合同于$B=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&0\\0&\lambda_2&0&0\\0&0&\ddots&0\\0&0&0&\lambda_n\end{pmatrix}$, 则必有(　). (2015年北京交通大学)

(A)$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$A$的特征值;　　(B)$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$

(C)A为正定阵　　(D)A为对称阵

9. 设A,B均为实对称矩阵, 则A,B在$\mathbb{R}$上合同的充要条件是(　). (2015年北京交通大学)

(A)A,B的秩相等　　(B)A,B都合同于对角阵

(C)A,B的特征值相同　　(D)A,B的正负惯性指数相同

10. 设

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix},$$

则A与B(　). (2016年北京交通大学)

(A)合同且相似　　(B)合同但不相似

(C)不合同但相似　　(D)既不合同也不相似

11. 设

$$A=\begin{pmatrix}2&2&2&2\\2&2&2&2\\2&2&2&2\\2&2&2&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

则A与B(　). (2017年北京交通大学)

(A)合同且相似　　(B)合同但不相似

(C)不合同但相似　　(D)既不合同也不相似

12. 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 下列结论正确的有（　　）

A. A 的特征值都是实数;

B. A 的不同特征值下的实特征向量正交;

C. 如果 C 是实可逆矩阵, 使 C^TAC 为对角矩阵, 则 $C^{-1}AC$ 为对角矩阵;

D. 与 A 合同的实矩阵 B 一定与 A 相似.

三.计算题

1. 二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3+4x_3x1$$

(1)求$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$的矩阵A, 特征值, 特征向量.

(2)$A=CDC'$要求C为正交矩阵, D为对角矩阵, 求C,D.

(3)在单位球$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$上求二次型$f(x_1,x_2,x_3)$的最大最小值. (2011年北京大学)

2. 设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=X'AX=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3(b>0)$$

中二次型的矩阵A的特征值之和为1, 特征值之积为-12.

(1)求a,b的值;

(2)用正交替换将二次型$f(x_1,x_2,x_3)$化为标准型, 并写出所用的正交替换. (2013年工业北京大学)

3. 设A是n阶实对称矩阵, 秩$(A)=n$, A_{ij}是$|A|$中元素a_{ij}的代数余子式, 记$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$, 设二次型$f(x)=\frac{1}{|A|}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}x_ix_j$.
(1)写出二次型$f(x)$的矩阵形式, 并求该二次型的矩阵.
(2)二次型$g(x)=x'Ax$二与$f(x)$的规范型是否相同? 说明理由. (2015年北京工业大学)

4. 已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x3$(其中$a>0$) 经过正交替换$X=TY$化为标准型$f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+5y_3^2$.
(1)求参数a及所用的正交替换$X=TY$;
(2)求在条件$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$下f的最大值. (2018年北京工业大学)

5. 二次型$f(X)=f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+2ax_2x3$ 经过正交变换化为标准型$f=3y_1^2+3y_2^2+by_3^2$.
(1)求a,b及所用的正交变换矩阵;
(2)若$X^TX=2$, 求f的最大值. (2009年北京交通大学)

6. 求以下二次型的矩阵:

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{m}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)^2.$$

(2011年北京交通大学)

7. 用正交线性替换化下面二次型为标准型:

$$x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3.$$

(2012年北京交通大学)

8. 用正交线性替换化$f=2x_1x_2+2x_3x_4$为标准型. (2013年北京交通大学)

9. 若二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2\alpha x_1x_3+2\beta x_2x3$$

经过正交变换后可化为标准型$f(y_1,y_2,y_3)=y_2^2+2y_3^2$, 求$\alpha,\beta$, 并求出该正交变换. (2014年北京交通大学)

10. 已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为2.
(1)求a的值.
(2)求正交变换$X=QY$把$f(x_1,x_2,x_3)$化成标准型. (2016 年北京交通大学)

11. 已知二次型X^TAX经正交变换化为$2y_1^2-y_2^2-y_3^2$, 又已知$A^*\alpha=\alpha$其中$\alpha=(1,1,-1)^T$, A^* 为A 的伴随矩阵, 求此二次型的表达式. (2017年北京交通大学)

12. 设$n>1$阶实方阵$A_n=\begin{pmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{pmatrix}$

(1)求矩阵A_n的秩;

(2)矩阵A_n何时是正定的? (2011年北京科技大学)

13. 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为2

(1)求参数c使得该二次型的秩等于2;

(2)写出该二次型的矩阵A;

(3)求一个正交矩阵P和一个对角矩阵Λ使得$P^{-1}AP=\Lambda$;

(4)求一个非退化线性替换$x=Cy$把该二次型化为标准形. (2012年北京科技大学)

14. 设实对称矩阵$A=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$,

(1)求可逆矩阵T, 使得$T^{'}AT$成对角矩阵, 并写出该对角矩阵;

(2)求一个非退化线性替换把二次型$f(x)=x^{'}Ax$化为标准形. (2013年北京科技大学)

15. 已知$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$.

(1)写出二次对应的矩阵;

(2)用正交变换将二次型化为标准形, 并写出对应的正交变换. (2016 年北京科技大学)

16. 求一正交变换$x=Qy$将二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 化为标准型, 并写出相应的的标准型. (2012年大连理工大学)

17. 设二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{1\le i\le j}x_1x_j$.

(1)判断二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的正定性;

(2)用正交线性替换把二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$ 化为标准型. (2018年大连理工大学)

18. 设A为n阶实对称矩阵, $b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{'}$为$n$ 维实的列向量, 证明:

(1)若$A>0$, 则$A^{-1}>0$, 这里$A>0$表示A为正定矩阵;

(2)若$A-bb^{'}>0$, 则$A>0$且$b^{'}A^{-1}b<1$. (2011年湖南大学)

19. 用正交线性替换化二次型

$$f(x)=-x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3.$$

为标准型, 求出相应的正交变换矩阵T. (2013年湖南大学)

20. 设二次型$f(x_1,x_2)=ax_1^2+2bx_1x_2+cx_2^2$, 求二次型

$$g(x_1,x_2)=\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ -x_1 & a & b \\ -x_2 & b & c \end{vmatrix}$$

的矩阵, 并证明$f(x_1,x_2)$是正定的当且仅当$g(x_1,x_2)$是正定的. (2009年湖南师范大学)

21. 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$是实对称矩阵, 证明: 二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ x_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的矩阵是A的伴随矩阵A^*. (2009年湖南师范大学)

22. 设$n(n\geq 3)$元实二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_1x_n+x_2x_3.$$

(1)当$n=3$时, 用非退化线性替换化$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为规范型;

(2)当$n>3$时, 用非退化线性替换化$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为规范型. (2013年湖南师范大学)

23. 已知实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=(1+t)x_1^2+2x_2^2+(1+t)x_3^2+x_1x_2+2(1-t)x_1x_3$$

的秩为2.

(1)求t的值;

(2)求正交线性替换, 使二次型$f(x_1,x_2,x_3)$为标准型. (2016年湖南师范大学)

24. 设4元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2\sum_{i=1}^{4}x_i^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1)$$

试用正交线性替换化二次型为标准型, 并求它的正、负惯性指数以及符号差. (2009年华东师范大学)

25. 设

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

是一个实二次型, 其中$A=(a_{ij})$是实对称矩阵. 将二次型看作n 元实函数, 用代数的方法确定它在

$$S=\{X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n|x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1\}$$

上的取值范围. (2011年华东师范大学)

26. 用正交替换化下列二次型为标准型

$$2x_1^2+4x_1x_2-4x_1x_3+5x_2^2-8x_2x_3+5x_3^2. \text{ (2013年华东师范大学)}$$

27. 设$A\in M_n(\mathbb{C})$是半正定矩阵, 且存在整数$m>1$, 使得$A^m=E_n$, 求A.
若将上述“半正定”的条件改为“半负定”, 你能得出什么结论?. (2014 年华东师范大学)

28. 已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2\lambda x_1x_2+2x_1x_3$$

正定, 求λ的取值范围. (2017年华东师范大学)

29. 设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2bx_2x_3$$

经正交变换$X=PY$化标准型$f=y_2^2+2y_3^2$, 其中$X=(x_1,x_2,x_3)'$, $Y=(y_1,y_2,y_3)'$ 是3维列向量, P是3阶正交矩阵,
(1)求常数a,b的值;
(2)求正交矩阵P. (2014年华南理工大学)

30. 设实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=X'AX=ax_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2bx_1x_2(b>0),$$

其中二次型的矩阵A的特征值之和为1, 之积为-12.
(1)求a,b的值;
(2)利用正交变换将二次型化为标准型, 并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵. (2015年华南理工大学)

31. 设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+2ax_2x_3$$

经正交变换$X=PY$化标准型$f=3y_1^2+3y_2^2+by_3^2$, 其中$X=(x_1,x_2,x_3)'$ 是3维列向量, P是3阶正交矩阵,

(1)求常数a,b的值;

(2)求正交矩阵P. (2019年华南理工大学)

32. 已知$f(x_1,x_2,x_3)=2ax_1^2+2ax_2^2+2ax_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$

(1)求存在矩阵Q使得$X=QY$的标准型;

(2)求a为何值时, $f(x_1,x_2,x_3)$的二次型矩阵的秩为2. (2020 年同济大学)

33. 求正交变换化

$$xy+yz+zx=1$$

为标准方程, 并指出曲面类型.

34. 设有三元实二次型

$$f(x,y,z)=x^2+3y^2+z^2+4xz$$

并设 x,y,z 满足 $x^2+y^2+z^2=1$. 试求 f 的最大值和最小值, 并求当 x,y,z 取什么值时, f 分别达到最大值和最小值. (2010年华中师范大学)

35. 设实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+4x_1x_3+2bx_2x_3, a>0$$

通过正交变换化为标准形 $-y_1^2-y_2^2+5y_3^2$, 求参数 a,b 及所用的正交变换. (2014年兰州大学)

36. 设实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

通过正交变换化为标准形 $5y_1^2-y_2^2-y_3^2$, 求参数 a 及所用的正交变换. (2010年南京大学)

37. 试求二次型

$$f(x_1,\cdots,x_n)=a\sum_{i=1}^n x_i^2+2b\sum_{i<j}^n x_ix_j$$

正定的充要条件. (2017年兰州大学)

38. 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=t\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

1. t 为何值时, f 正定?

2. 取 $t=1$, 用可逆线性变换化二次型为标准型，并写出相应的线性变换. (2019年兰州大学)

39. (15 分) 已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2tx_2x_3$(其中$t>0$) 可以通过正交变换化为标准形 $y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$. 求 t 和所用的正交变换. (2010年南京大学)

40. (20 分) 试用正交线性替换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

为标准型, 并写出所用的正交线性替换和所得的标准型. (2013 年南京大学)

41. 试用正交线性替换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$$

为标准型, 并写出所用的正交线性替换和所得的标准型. (2015 年南京大学)

42. (30 分) 求实二次型$f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{x_j}{n}\right)^2$ 的矩阵及正负惯性指数. (2009 年南京师范大学)

43. 用正交线性替换化下列二次型为标准形:

$$x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3.$$

(2011年南京师范大学)

44. (20 分) 求二次型$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+6x_3^2+4x_1x_2-10x_1x_3-6x_2x_3$ 的矩阵并判别该二次型是否正定. (2012 年南京师范大学)

45. (20 分) 已知$s\times n$ 实矩阵$A=(a_{ij})$ 的秩为r, 求如下二次型的正惯性指数.

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{s}\left(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in1}x_n\right)^2.$$

(2016年南京师范大学)

46. 试决定当实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足什么条件时, n 元实二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1+a_2x_2)^2+(x_2+a_3x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_nx_n)^2+(x_n+a_1x_1)^2$$

是正定的. (2009年南开大学)

47. 设

$$A=\begin{bmatrix}10&7&7\\7&10&7\\7&7&10\end{bmatrix}$$

求 A 的特征值与特征向量, 并求正定矩阵 B 使得 $B^2-I=A$. (2010年上海大学)

48. (1). 求出下述行列式所表示的一元多项式 $f(x)$ 的最高次幂项:

$$f(x)=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4&\cdots&a_n\\a_n&a_1&a_2&a_3&\cdots&a_{n-1}\\a_{n-1}&x&a_1&a_2&\cdots&a_{n-2}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_3&x&\cdots&x&a_1&a_2\\a_2&x&\cdots&x&x&a_1\end{pmatrix}$$

其中: $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为数域 P 中的数.

(2). 将二次型 $x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_3x_3+2x_2x_3$ 化为标准型, 并给出所用的线性替换. (2013年上海交通大学)

49. 试求 λ 取什么值得时候, 下列二次型

$$5x_1^2+x_2^2+\lambda x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$$

是正定二次型. (2009年首都师范大学)

50. 设 A, B 为 n 阶半正定实对称方阵, 问 $A+B$ 是否为半正定的? (若肯定给出理由, 若否定给出反例). (2012年首都师范大学)

51. 设

$$A=\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

设$f(X)=X'AX$ 是二次型.求一个正交变换$X=TY$ 把$f(X)$ 化为标准型. (2015年四川大学)

52. 在$Q(x,y,z)=\lambda(x^2+y^2+z^2)+2xy+2xz-2yz$ 中，问：

1.λ 取什么值时，Q为正定的？

2.λ 取什么值时，Q为负定的？

3.当$\lambda=2$ 和$\lambda=-1$ 时，Q是什么类型？(2012年武汉大学)

53. 设$a_1, a_2, \cdots, a_s$ 是互不相等的实数，矩阵

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_s \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_s^2 \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_s^{n-1} \end{pmatrix}.$$

试讨论矩阵$A=B^TB$ 的正定性. (2013年武汉大学)

54. 判定二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=n\sum_{i=1}^n x_i^2-(\sum_{i=1}^n x_i)^2,$$

的类型，并说明理由. (2018年武汉大学)

55. 利用非退化线性替换将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+bx_2^2+cx_3^2+2cx_1x_3$$

化为标准型，求出所做的非退化线性替换，并指出a，b，c满足何种条件时，f 为正定二次型. (2018年湘潭大学)

56. 已知实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 为正定二次型，求λ 的取值范围. (2010年云南大学)

57. 用正交变换把下面二次型转化为标准形，并判断二次型是否正定.

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3,+2x_2x_4+2x_3x_4.$$

(2010年云南大学)

58. 已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(1-a^2)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为2.

（1）求a的值;

（2）求正交变换$X=QY$ ，把$f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形;

（3）求方程$f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解. (2015云南大学)

59. 若二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 是正定的，求t的取值范围. (2016年云南大学)

60. 设二次型$f(X)=X'AX, A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&\alpha\\1&-3&0\end{pmatrix}$ ，经正交变换$X=PY$ 化为标准形$f(y)=2y_1^2+2y_2^2+\beta y_3^2$ ，求α,β 的值及正交矩阵P. (2017年云南大学)

61. 已知实二次型$Q(x,y,z)=ax^2+y^2+z^2+xy+yz+zx$ 正定，求实数a的取值范围. (2011年中科大)

62. 设$n\geq 2$ ，求实二次型$Q(x_1,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^2$ 的规范型. (2012年中科大)

四.证明题

1. 设A是n阶正定矩阵, 向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$满足$\beta_iA\beta_j=0(1\leq i\leq j\leq n)$. 问向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的秩可能是多少, 证明你的结论. (2010年北京大学)

2. 设$A,B\in M_n(\mathbb{R})$, A正定, B对称, 证明存在可逆矩阵T使得A,B可同时合同对角化. (2012 年北京大学)

3. 设A,B为实对称矩阵, A正定.

(1)证明: 存在可逆矩阵P使得$PAP=E$且$P^{'}BP$为对角矩阵.

(2)若B也正定, 证明: $|A+B|>|A|$. (2017年北京工业大学)

4. ________. (2009年北京大学)

5. A为n阶实对称矩阵, $\begin{pmatrix}A&B\\B^{'}&c\end{pmatrix}$ 正定, B为$n\times 1$矩阵, c为常数. 证明:

$$\begin{vmatrix}A&B\\B^{'}&c\end{vmatrix}=c|A|.$$

等号成立当且仅当$B=O$. (2019年北京工业大学)

6. 设A,B都是实对称矩阵, 且A为正定矩阵, B是非零半正定矩阵, 证明:
   (1)$A+B$是正定矩阵;
   (2)$|A+B|>|A|$. (2010年北京交通大学)

7. 设A是n阶实对称矩阵, 对任意非零的n维列向量$X\in\mathbb{R}^n$定义实数
$$R(X)=\tfrac{X^TAX}{X^TX},$$
   其中X^T是X的转置.
   证明: $\min\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}\le R(X)\le\max\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$ 其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为矩阵A的n个特征值. (2012年北京交通大学)

8. 设A,B分别为n阶实对称和正定矩阵. 证明: 乘积AB的特征根全为实数. (2013年北京交通大学)

9. 设$A=(a_{ij})$是n阶实对称方阵, 秩$(A)=n$, 作二次型
$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j,\ g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\tfrac{A_{ij}}{|A|}x_ix_j,$$
   其中A_{ij}是a_{ij}的代数余子式. 证明: f与g具有相同的正负惯性指数. (2015年北京交通大学)

10. 设A,C为n阶正定阵, 已知B是矩阵方程$AX+XA=C$的唯一解, 证明B是正定矩阵. (2015年北京交通大学)

11. 证明: n阶可逆对称矩阵A是正定矩阵的充要条件是对任意n阶正定矩阵B, AB的迹$tr(AB)$均大于0. (2016年北京交通大学)

12. 若B为正定阵, A为半正定阵, 求证: $|A+B|\ge|B|$, 且等号成立的充要条件是$A=0$. (2009年北京科技大学)

13. 设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是秩为n的二次型. 证明: 存在R^n的一个$\frac{1}{2}(n-|s|)$维子空间V_1(s 是符号差)使对任一$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in V_1$都有$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$. (2010年北京科技大学)

14. 试证明: 实对称矩阵A的特征值全部落在区间$[a,b]$上的充分必要条件是矩阵$A-aE$半正定且$bE-A$半正定.. (2014年北京科技大学)

15. 已知$C'=-C$. 证明:
    (1)$C'C$是半正定矩阵;
    (2)$|E+C|^2=|E+C'C|$. (2017年北京科技大学)

16. $f(x)=X'AX$正定的充要条件是A的各阶主子式大于0. (2011年北京师范大学)

17. 设A为n阶实对称矩阵, x为n维向量, 证明: $0 < x^{'}(A+xx^{'})^{-1} < 1$. (2012年大连理工大学)

18. 证明: $A^{'}A$正定的除非必要条件是$r(A)=n$. (2016 年大连理工大学)

19. 证明: 一个实二次型可以分解成两个实系数的一次齐次多项式的乘积的充分必要条件是它的秩等于2和符号差等于0, 或者秩等于1. (2016年大连理工大学)

20. 设A为n阶实对称矩阵, 其特征值满足$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$, 证明:
(1)对任意非零实向量$x \in \mathbb{R}^n$, 均有$\lambda \le \frac{x^{'}Ax}{x^{'}x} \le \lambda_n$;
(2)设B为n阶实对称正定矩阵, 则$\lambda = \min\limits_{\lambda \in \mathbb{R}^n} \frac{x^{'}Ax}{x^{'}Bx}$, 其中$\lambda$为矩阵$AB^{-1}$的最小特征值. (2012年湖南大学)

21. 设A为n阶实对称正定矩阵, B为$n \times m$阶实矩阵, 令$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^{'} & 0 \end{pmatrix}$, 证明: 若$B$为列满秩矩阵, 则二次型$f(X) = X^{'}MX$的正负惯性指数分别为$n$和$m$. (2013年湖南大学)

22. 设A, B均为n阶实对称矩阵, 且A是正定矩阵, B 是半正定矩阵, 证明: (1)存在n阶可逆矩阵T, 使得$T^{'}AT$和$T^{'}BT$同为对角矩阵;
(2)$A+B$为正定矩阵的充分必要条件是BA^{-1}的所有特征值都大于-1. (2013年湖南大学)

23. 设A为m阶实对称正定矩阵, B为$m \times n$实矩阵, 试证B^TAB为正定矩阵的充分必要条件是$r(B)=n$. (2014 年湖南大学)

24. 设A, B是两个实对称矩阵, 且B是正定矩阵, 证明存在n 阶实可逆矩阵X, 使X^TAX与X^TBX同时为对角矩阵. (2014年湖南大学)

25. 设A为实对称正定矩阵, B为实对称矩阵, P^T表示矩阵的转置, 证明:
(1)存在可逆矩阵P, 使得$P^T(A+B)P$为对角矩阵;
(2)若B也是正定的, 则$\frac{1}{2}(A+B) - 2(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$为半正定矩阵. (2017年湖南大学)

26. 设A为n阶实对称矩阵,

$$S_A = \{x \in \mathbb{R}^n : x^TAx = 0\},$$

这里x^T表示x的转置向量, B^T表示矩阵的转置, 证明:
(1)若A为半正定矩阵, 则存在n阶实方阵B, 使得$A = B^TB$;
(2)S_A为$\mathbb{R}^n$的线性子空间的充要条件是A为半正定或半负正定矩阵矩阵. (2017年湖南大学)

27. 设有实二次函数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} 2b_ix_i + c, \ a_{ij} = a_{ji}$$

令$A=(a_{ij})_{n\times n}$, $D=\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & c \end{pmatrix}$, 其中$B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$.

(1)证明: A负定时, f有最大值, 且$f_{max}=\frac{|D|}{|A|}$.

(2)设A负定, 试确定当$x_1,x_2,\cdots,x_n$为何值时, f 取得最大值, 并说明理由. (2010年华东师范大学)

28. 设A是n阶实对称矩阵. 证明:

(1)存在正定矩阵B和负定矩阵C, 使得$A=B+C$. 这样的分解唯一吗? 说明理由.

(2)如果A正定, 且$n>1$, 则存在不定矩阵D, 使得$A=D^2$. (2012年华东师范大学)

29. 证明: 下列二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2$$

是半正定型. (2016年华东师范大学)

30. 已知2019阶实对称矩阵A满足$A^2=2019A$, 证明: $E+A+\cdots+A^{2019}$为正定矩阵. (2019年华东师范大学)

31. 设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^{'}AX$为$n$元实二次型, 若矩阵$A$的顺序主子式$\Delta_k(k=1,2,\cdots,n)$都不为零, 证明$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$可以经过非退化的线性替换化为下述标准型

$$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

这里$\lambda_i=\frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}},i=1,2,\cdots,n$, 并且$\Delta_0=1$. (2009年华南理工大学)

32. 设A是n阶实对称矩阵, 若A的前$n-1$个顺序主子式均大于零, 而$|A|=0$. 证明: n元二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^{'}AX$$

是半正定的, 其中$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{'}$. (2010年华南理工大学)

33. 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$, $B=(b_{kl})_{n\times n}$为两个半正定的实对称矩阵. 证明: n阶方阵

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{2n}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b_{n1} & a_{n2}b_{n2} & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

也是半正定. (2011年华南理工大学)

34. 设A,B为n阶实方阵, 且A为非零半正定矩阵, B 为正定矩阵, 证明:

$$|A+B|>|B|. \text{ (2012年华南理工大学)}$$

35. 设n阶实对称矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$是正定的, $b_1,b_2,\cdots,b_n$是任意n个非零的实数, 证明: 矩阵$B=(a_{ij}b_{ij})$也是正定的. (2013年华南理工大学)

36. 设A,C是n阶正定矩阵, 已知B是矩阵方程

$$AX+XA^{'}=C$$

的唯一解, 证明: B是正定矩阵. (2014年华南理工大学)

37. 设$l_i=c_{i1}x_1+c_{i2}x_2+\cdots+c_{in}x_n, i=1,2,\cdots,p++q$, 这里$c_{ij}\in\mathbb{R}$. 试证明实二次型:

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=l_1^2+l_2^2+\cdots+l_p^2-l_{p+1}^2-\cdots-l_{p+q}^2$$

的正惯性指数$\leq p$, 负惯性指数$\leq q$. (2016年华南理工大学)

五.问答题

1. 设A,B为n阶正定矩阵, 请给出乘积AB仍是正定矩阵的充要条件, 并简略说明. (2010年湖南师范大学)

2. 若A和B都是n阶正定矩阵, 则$A+B,AB,A^{-1}$中哪些必是正定矩阵? (2011年湖南师范大学)

3. 设 A 是 n 阶实对称矩阵, α 是 n 维实向量, 已知矩阵

$$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha' & 1 \end{pmatrix}$$

是正定矩阵.

(1) 证明矩阵 A 可逆. A 正定吗? 说明你的理由.

(2) 证明 $\alpha' A^{-1}\alpha<1$.(2009年华中科技大学)

4. 已知 A,B 为对称矩阵, 且 A 为正定矩阵, 证明存在常数 c, 使得 $cA+B$ 为正定矩阵.(2010年华中科技大学)

5. 已知 A,B 为实对称矩阵

(1) 若 A,B 正定, $AB=BA$, 证明 AB 也正定;

(2) 若 A,B 半正定, 证明 $A+B$ 也半正定, 若还有 A 正定, 证明 $A+B$ 也正定.(2012年华中科技大学)

6. 设 A 为 n 阶正定矩阵, 求证

$$|A|\leq a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

a_{ii} 为矩阵 A 主对角元素.(2015年华中科技大学)

7. 设 A 为 n 阶正定的实对称方阵, $y \in \mathbb{R}^n$ 且 $y \neq 0$. 证明极限

$$\lim_{m \to \infty} \frac{y' A^{m+1} y}{y' A^m y}$$

存在, 且等于 A 的一个特征值.(2016年华中科技大学)

8. 假设一个矩阵 A 的前 $n-1$ 个顺序主子式都是大于 0, 但 $\det(A)=0$, 证明 A 半正定.(2018年华中科技大学)

9. 已知实对称矩阵 A, 定义 $\operatorname{sgn}(A)$ 为矩阵的正惯性指数与负惯性指数的差, 现有正定矩阵 B, 试证明:

$$\operatorname{sgn}(A) \leq \operatorname{sgn}(A+B).$$

(2019年华中科技大学)

10. 设 $\mathbb{R}$ 表示实数域, $M_n(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上所有实矩阵的集合.

(1) 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 是 n 阶实对称矩阵, E 是单位矩阵, 且 A 满足 $A^3+6A-7E=0$. 证明: A 是正定矩陈.

(2) 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 是 n 阶实矩阵. 证明: 存在唯一的 n 阶实对称矩阵 B, 使得对任意的 $X \in \mathbb{R}^n$, 有

$$X^T A X = X^T B X.$$

(2011年华中师范大学)

11. 设 A 为 n 阶半正定矩阵, 用 9. $\det(A)$ 表示方阵 A 的行列式.

(1) 证明: 当 B 是 n 阶正定矩阵时, $\det(A+B) \geqslant \det(B)$, 等号成立当且仅当 $A=0$.

(2) 当 $A \neq 0$ 时, $\det(A+E)>1$. (2012年华中师范大学)

12. (1) 证明: 实对称矩阵的任何特征根总是实数.

(2) 设 A 是一个 n 阶实对称矩阵. 证明: A 是正定矩阵当且仅当存在 n 阶实可逆矩阵 B 使得

$$A=B^T B.$$

(2013年华中师范大学)

13. 设 $q(X)$ 为一个二次型, 且满足只要 X 的各分量均非零, 即 $x_1 \neq 0, \cdots, x_n \neq 0$ 时就有 $q(X)$ 的值是正的. 举例说明 $q(X)$ 不一定是正定二次型, 证明 $q(X)$ 是半正定二次型. (2015年华中师范大学)

14. (1) 设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4.$$

利用满秩的线性替换把二次型化为平方和，并求二次型的正和负惯性指数.

(2) 设 V 是一个欧氏空间，它上面的内积记为 $\langle *,*\rangle$. 证明施瓦茨不等式：

$$\langle\alpha,\beta\rangle^2 \leqslant \langle\alpha,\alpha\rangle\langle\beta,\beta\rangle$$

对任意的 $\alpha,\beta\in V$ 成立. (2017年华中师范大学)

15. 设 A 是实对称正定矩阵. 证明: A 可唯一分解为 $A=B^2$, 其中 B 正定.

14.（20 分）设 A 是 n 级实对称矩阵. 证明: A 正定的充分必要条件是 A 的所有顺序主子式都大于零. (2010年兰州大学)

16. 设 A 是 n 级实对称矩阵, 证明: A 是半正定的充分必要条件是对任意的实数 $k>0, kE+A$ 是正定矩阵.

(2) 设 A 是 n 级正交矩阵且 $|A|=-1$. 证明: $|E+A|=0$. (2011年兰州大学)

17. 设 A,B 都是 n 阶非零实矩阵, 且. A 为正定矩阵, B 为半正定矩阵. 证明:

(1) $|E_n+B|>1$.

(2) 若 B 和 $A-B$ 也是正定矩阵, 则 $B^{-1}-A^{-1}$ 也是正定阵. (2016年兰州大学)

18. 3.5em 17.（15 分）设 A 和 C 都是 n 阶正定矩阵, B 是矩阵方程 $AX+XA=C$ 的唯一解. 证明:

(1) B 是实对称的.

(2) B 是正定的. (2009年南京大学)

19. 设 A,B 都是正定矩阵.

1. 举例说明矩阵 AB 未必正定.

2. 给出 AB 是正定矩阵的一个充要条件, 并加以证明. (2011年南京大学)

20. 设 A 和 B 是 n 级实矩阵. 如果 B 是正定的, $A-B$ 是半正定的. 证明:

1. $|A-\lambda B|=0$ 的所有根 $\lambda\geqslant 1$.

2. $|A|\geqslant|B|$. (2014年南京大学)

21. 已知 A,B 都为 n 级正定矩阵, 证明:

(1) A 中绝对值最大的元素在主对角线上;

(2) $|A+B|>|A|+|B|$. (2010年南京师范大学)

22. 设 A 为 n 级实对称半正定矩阵, B 为 n 级正定矩阵, 证明: $|A+B|\geqslant|B|$. (2011年南京师范大学)

23. 设 A 是一个 n 级矩阵, 证明:

(1) A 是反对称矩阵当且仅当对任一个 n 维向量 X, 有 $X'AX=0$;(X' 表示 X 的转置) .

(2) 如果 A 是对称矩阵, 且对任一个 n 维向量 X 有 $X'AX=0$, 那么 $A=0$. (2011年南京师范大学)

24. 设 A 为正定矩阵,

(1) 证明: 对任意的正整数 m, 存在正定矩阵 B 使得 $A=B^m$;

(2) 在 A 的特征值两两不同的情形下证明: 满足 $A=B^m$ 的正定矩阵 B 是唯一确定的. (2016年南京师范大学)

25. 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 二次型 $f(X)=X'AX$ 的正负惯性指数分别为 p,q, 且 $p\geqslant q>0$. 证明: 存在 q 维子空间 W, 满足 $\forall X_0\in W$, 均有 $f\left(X_0\right)=0$. (2017 年南京师范大学)

26. 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是两两互异的正数. 求证:

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1+a_1} & \frac{1}{a_1+a_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+a_n} \\ \frac{1}{a_2+a_1} & \frac{1}{a_2+a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+a_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+a_1} & \frac{1}{a_n+a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+a_n} \end{pmatrix}$$

为正定矩阵. (2018年南京师范大学)

27. 设 A 为 n 阶正定对称矩阵， B 为 n 阶实反对称矩阵. 证明: $|A+B|>0$. (2007年南开大学)

28. (20 分) 设S,T 为n 阶实对称半正定矩阵, 证明 $\det(S+T)\geq\frac{1}{2}[\det(S)+\det(T)]$. (2008年南开大学)

29. 设 $A,A-E_n$ 均为 n 阶对称正定矩阵, 证明: E_n-A^{-1} 也是正定矩阵. (2008年南开大学)

30. 设 A 为 n 阶实反对称矩阵, 证明:

(1) $\det A\geq 0$.

(2) 如果 A 中元素全为整数，则det A 必为某个整数的平方. (2010年南开大学)

31. (20 分) 设A 为实反对称矩阵, 证明: $E-A^{10}$ 一定是正定矩阵.(2011年南开大学)

32. 证明实方阵 A 为反对称矩阵的充要条件是 $AA'=-A^2$.(2012年南开大学)

33. A,B 都是 n 级反对称矩阵, , 且 A 可逆. 求证: $\left|A^2-B\right|>0$. (2014年南开大学)

34. (15 分) 设$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=X'AX$ 与$g\left(y_1,y_2,\cdots,y_n\right)=Y'BY$ 都是实二次型, 且$AB=BA$. 证明: 存在非退化线性替换同时把 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ 与 $g\left(y_1,y_2,\cdots,y_n\right)$ 化为标准形. (2016年南开大学)

35. (15 分) 设矩阵$A=\left(a_{ij}\right)_{nn}$, $B=\left(b_{ij}\right)_{nn}$, $C=\left(c_{ij}\right)_{nn}$, 其中$c_{ij}=a_{ij}b_{ij}$, $i,j=1,2,\cdots,n$, 如果A,B 均为正定矩阵, 证明 C 也是正定矩阵.(2017年南开大学)

36. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一个秩为 n 符号差为 s 的实二次型, 证明存在 $\mathbb{R}^n$ 的一个 $\frac{1}{2}(n-|s|)$ 维子空间 W, 使得对任意的 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in W$, 都有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$. (2017年南开大学)

37. 实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$, 证明: 当$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 时 ,$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的最小值恰好等于 A 的最小特征值.(2018年南开大学)

38. 若 A,B 均为 n 阶正定矩阵, 证明: $\operatorname{tr}(AB)>0$. (2019年南开大学)

39. (15 分) 已知整数$n\geq 3$, 实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足$x_1+x_2+\cdots+x_n=0,x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$, 证明:

$$x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n+x_nx_1\leq\cos\frac{2\pi}{n}.$$

(2019年南开大学)

40. n 阶实对称矩阵 A,B 的特征值都是正数, C 为正定矩阵, A 的特征向量都是 B 的特征向量. 证明:

(1) AB 为正定阵;

(2) $\operatorname{tr}(ABC)\geq 0$. (2009年上海大学)

41. 设 A 为 n 阶实对称矩阵, $\alpha=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^T$ 为 n 维实列向量.

(1) 证明 $I-\alpha\alpha^T$ 的特征值为 $1(n-1$ 重) 与 $1-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2$;

(2) 证明 $A-\alpha\alpha^T$ 正定的充分必要条件是 A 正定, 而且 $\alpha^TA^{-1}\alpha<1$. (2010年上海大学)

42. A 为 n 阶实矩阵, $A+A'$ 为正定矩阵, 证明 $|A|>0$. (2012年上海大学)

43. 叙述并且证明实二次型惯性定理. (2013年上海大学)

44. 设 A 为 n 阶实对称矩阵, C 为 n 阶实矩阵, 求证

$$B=\begin{vmatrix}A & C'\\ C & 0\end{vmatrix}$$

为半正定阵的充要条件是 A 半正定且 $C=0$. (2013年上海大学)

45. 设 A,C 是 n 阶实对称矩阵, 且矩阵方程 $AX-XA=C$ 存在唯一解 B.

(1) 证明: B 为实对称矩阵.

(2) 如果 A,C 为正定矩阵, 求证: B 为正定矩阵. (2014 年上海大学)

46. 设 A 为 n 阶正定矩阵, B 为 n 阶实对称矩阵, 且 $|\lambda A+B|=0$ 的根 λ 都大于 0, 求证 B 为负定矩阵. (2015年上海大学)

47. 设 A,B 均为 n 阶实对称阵, 证明: AB 的特征值都大于零. (2010年上海交通大学)

48. H 为 $Hermite$ 阵, 证明：H 正定当且仅当 H 的所有主子式均为正实数. (2011年上海交通大学)

49. 求证: 实对称矩阵 A 的所有特征值位于区间 $[a,b]$ 上的充分必要条件是: 实对称矩阵 $A-\lambda_0 I$ 对任意 $\lambda_0<a$ 是正定的, 而对任意 $\lambda_0>b$ 是负定的. (2014年上海交通大学)

50. 求证：设A是 n 阶实对称矩阵, 存在一正数 c 使对任一 n 维向量 X 都有 $|X'AX|\geq cX'X$. (2014年上海交通大学)

51. 设 A 是实矩阵, A' 是 A 的转置矩阵. 求证: AA' 与 A 的秩相等, 且当 A 满秩时 AA' 是正定的. (2014年上海交通大学)

52. (15 分) 如果二次型$f=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ 是正定的, 则$g(y_1,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & y_n \\ y_1 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix}$ 是负定的. (2016年上海交通大学)

53. A,B 都是实对称矩阵, 证明 A 是正定矩阵的充要条件是: 对于任意一个正定矩阵 B, 都有 $\mathrm{tr}(AB)>0$. (2018年上海交通大学)

54. 设 A,B 为 n 阶半正定矩阵, 证明: AB 的特征值全是非负实数. (2010年首都师范大学)

55. 设 A,B 是 n 阶正定矩阵, 证明:

$$A^2-A+E+B^{-1}+B$$

是正定矩阵. (2011年首都师范大学)

56. 设 T 为 n 阶实对称方阵, 同时也是正交阵. 证明: 存在整数 $m(0\leq m\leq n)$ 使得

$$\mathrm{tr}(T)=n-2m$$

此外若 $m=0$ 则 $T=I($ 单位方阵). 而若 $m=n$ 则 $T=-I$. (注: $\mathrm{tr}(T)$ 为矩阵 T 的迹, 即 T 的主对角线上元素之和).(2012年首都师范大学)

57. 设

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\,A\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

为三元实二次型(A 为三元实对称方阵), B 为3维欧几里得空间 V 中的单位球面

$$\left\{(a_1,a_2,a_3)^T\,|a_1^2+a_2^2+a_3^2=1\right\}$$

设 f 在 B 上的最大值为 λ, 而最大值在点 $v\in B$ 处达到. 证明: 若向量 w 与 v 正交, 则 Aw 与 v 正交. (2014年首都师范大学)

58. 设 A 为半正定对称方阵，证明:

$$\operatorname{tr}(A) \geq 0$$

且等号仅当 $A=0$ 时成立. (2014年首都师范大学)

59. 设 A 为 7×8 实矩阵, 记 A^T 为 A 的转置矩阵, 证明: A^TA 是半正定对称阵, 但不是正定的. (2014年首都师范大学)

60. 设 n 阶实方阵 P 既是正定对称阵又是正交阵, 证明 P 是单位阵. (2017年首都师范大学)

61. 设A是n阶实对称.证明：A是半正定矩阵当且仅当对任意n阶半正定矩阵B都有$tr(AB)\geq 0$，这里tr表示矩阵的迹.(2012年四川大学)

62. 证明如下的定理：设A是实对称矩阵，则A是正定矩阵的充要条件是A的顺序主子式全部大于0. (2015年四川大学)

63. 设A是n阶实对称阵，$n>1$.设对任意实向量$\alpha\in\mathbb{R}^n$ 都有$\alpha' A\alpha\geq 0$.证明：集合

$$W=\{X\in\mathbb{R}^n|X'AX=0\}.$$

是$\mathbb{R}^n$ 的维数为$n-r(A)$ 的子空间，其中$r(A)$ 是A的秩. (2017年四川大学)

64. 设n元实二次型$f(x)=x^TAx$ 的秩为n，正、负惯性指数分别为p，q，且$p\geq q>0$.
1.证明存在$\mathbb{R}^n$ 的一个q维子空间W，使$\forall x_0\in W, f(x_0)=0$;
2.令$T=\{x\in\mathbb{R}^n|f(x)=0\}$ ，问T与W是否相等？为什么？(2011年武汉大学)

65. 设A是n阶正定矩阵，B是n阶实对称矩阵，证明：必存在n阶可逆矩阵G，使得

$$G^TG=E, G^TBG=diag(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n),$$

其中E是n阶单位矩阵，$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是$|\lambda A-B|=0$ 的n个实根. (2013年武汉大学)

66. A是n阶实对称矩阵，其正负惯性指数分别是$p,q,f(x)=X'AX$ ，记$N_f=\{x|f(x)=0,x\in\mathbb{R}^n\}$ ，证明：
1.包含于N_f 的线性空间维数至多是$n-\max(p,q)$;
2.若ω 是$\mathbb{R}^n$ 的一个线性子空间，将二次型限定在ω 中，得到的正负惯性指数分别为p_1,q_1 ，则有$p_1\leq p,q_1\leq q$.(2015年武汉大学)

67. 已知A，B都是实正定矩阵，则存在可逆矩阵P，使得$P'AP,P'BP$ 同时为对角矩阵. (2015年武汉大学)

68. 已知A，B都是半正定矩阵，是否存在可逆矩阵P，使得$P'AP,P'BP$ 同时为对角矩阵.若存在给出证明，若不存在说明理由. (2015年武汉大学)

69. 证明如果A，B是半正定二次型的矩阵，则$A+B$ 也是. (2010年湘潭大学)

70. 设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3(b<0),$$

且二次型f 的矩阵A的特征值之和为1，特征值之积为-12.

（1）求a，b的值.

（2）求正交变换将二次型f 化为标准型. (2011年湘潭大学)

71. 设A为n阶实对称矩阵，则A的秩为n的充要条件是：存在n阶实矩阵B使得$AB+B'A$ 为正定矩阵. (2011年湘潭大学)

72. 证明：如果A为$n\times n$ 的实正定矩阵，则存在可逆的对称矩阵S使得$A=S^2$.(2012年湘潭大学)

73. 证明：如果A为$n\times n$ 的实矩阵，则A可表示为两个实正定矩阵乘积的充要条件是A可对角化且其所有特征值都大于零. (2012年湘潭大学)

74. 设$A=(a_{ij})$ 为n阶实对称正定矩阵，证明：

$$|A|\le a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

且等号成立当且仅当A为对角阵. (2013年湘潭大学)

75. 令n阶矩阵$A=(a_{ij})$ 为正定矩阵，证明：

（1）A的主对角元素均大于零，且A的绝对值最大的元素必在主对角线上.

（2）n阶矩阵$B=(b_{ij})$ 为正定矩阵，其中$b_{ij}=a_{ij}/\sqrt{a_{ii}a_{jj}}$.(2014年湘潭大学)

76. 证明：n阶矩阵A为正定矩阵当且仅当存在n阶可逆矩阵Q使得

$$A=Q'Q.$$

(2015年湘潭大学)

77. 令A为n阶实正定矩阵，证明：

（1）存在可逆的对称矩阵S使得$A=S^2$.

（2）如果A，B均为n阶实正定矩阵，且$AB=BA$ ，则AB 为正定矩阵. (2016年湘潭大学)

78. 令A与B均为n阶实正定矩阵.证明：

（1）存在可逆矩阵P使得$A=P'P$.

（2）$B-A$ 为正定矩阵当且仅当AB^{-1} 的所有特征值均小于1. (2017年湘潭大学)

79. 设A为n阶正定矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$ 为n维欧氏空间中的列向量.若已知$\alpha_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$, β 与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 都正交，且$\alpha_i'A\alpha_j'=0(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$ ，其中α_i' 是α_i 的转置.证明：$\beta=0$.(2010年云南大学)

80. 设A，B都是n阶矩阵，且A是正定矩阵.证明：存在实可逆矩阵T使得$T'(A+B)T$ 是对角矩阵. (2011年云南大学)

81. 设A是n阶实对称矩阵，且A正定，证明：$B'AB$ 正定的充要条件是$r(B)=m$ ，其中B是$n\times m$ 阶实矩阵. (2017年云南大学)

82. 假设$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是半正定矩阵，证明满足$X^TAX=0$ 的所有X组成$\mathbb{R}^n$ 的$n-r(A)$ 维子空间. (2011年浙江大学)

83. 令二次型

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{m}(a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n)^2.$$

（1）求此二次型的方阵;

（2）当a_{ij} 均为实数时，给出此二次型为正定的条件. (2012年浙江大学)

84. 证明：A正定的充要条件是存在方阵$B_i(i=1,2,\cdots,n)$, B_i 中至少有一个非退化，使得

$$A=\sum_{i=1}^{n}B_iB_i^T.$$

(2014年浙江大学)

85. 试证明：正定矩阵A中绝对值最大的元素可以在主对角线上取到. (2016年浙江大学)

86. 已知A是正定矩阵，证明$A+A^{-1}-2E$ 是半正定矩阵，并给出$A+A^{-1}-2E$ 是正定矩阵的充要条件. (2017年浙江大学)

87. 设$Q(x)$ 是n元实二次型，$V=\{x\in\mathbb{R}^n|Q(x)=0\}$.
求证：V是$\mathbb{R}^n$ 的子空间$\Leftrightarrow Q(x)$ 是半正定或半负定的. (2012年中科大)

88. 设二次曲面$x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$ 可以经由正交变换

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}$$

化成椭圆柱面方程$\eta^2+4\zeta^2=4$,试求a,b 和正交矩阵P. (2013年国科大)

89. 设A为n阶半正定矩阵.证明:$|A+2013E|\geq 2013^n$,等号成立当且仅当$A=0$,其中E是单位矩阵. (2013年国科大)

90. 矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$,定义$C=(b_{ij})_{n\times n}$.证明:若A,B半正定,则C半正定. (2014年国科大)

91. 设$f(x)=x'Ax$ 是实二次型,若存在n维实向量$x_1\neq x_2$ 使得$f(x_1)+f(x_2)=0$,证明:存在n维实向量$x_0\neq 0$ 使得$f(x_0)=0$. (2017年国科大)

92. 设A,B 是两个$n(n\geq 2)$ 阶实对称矩阵,证明

$$|A+B|>|A|+|B|.$$

(2019年国科大)

93. 证明下述n阶实对称矩阵为正定矩阵:

$$A=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1}\end{pmatrix}.$$

(2019年国科大)

94. 设A,B 均为n阶半正定实对称矩阵,且满足$n-1\leq r(A)\leq n$.证明:存在实可逆矩阵C使得$C'AC$ 和$C'BC$ 均为对角矩阵. (2015年中南大学)

95. 设n元实二次型$q(X)=X^TAX$ 满足条件:$q(X)=0$ 当且仅当$X=0$.证明:$q(X)$ 是正定的或者是负定的. (2011年中山大学)

96. 设$q(X)=X^TAX$ 为n元实二次型.如果A的所有特征值都属于区间$[a,b]$.证明:$A-tI$ 对应的二次型当$t>b$ 时是负定的;当$t<a$ 时是正定的. (2012年中山大学)

97. 设A,B 都是n阶实矩阵,其中A正定,B半正定.证明:

$$det(A+B)\geq det(A).$$

(2013年中山大学)

98. 设$q(X)=X^TAX$ 为n元实二次型,令$V=\{X\in\mathbb{R}^n:q(X)=0\}$.证明:二次型$q(X)$ 是半正定或半负定的充要条件时V为$\mathbb{R}^n$ 的子空间. (2014年中山大学)

99. 设n阶实矩阵$A=(a_{ij})$ 半正定.

(1)证明:存在$\alpha_u\in\mathbb{R}^n,i=1,\cdots,n$,使得a_{ij} 等于α_i 与α_j 的内积;

(2)证明:2n阶矩阵$\begin{pmatrix}A & A\\ A & A\end{pmatrix}$ 半正定;

(3)若实矩阵$B=(b_{ij})$ 也半正定,令$d_{ij}=a_{ij}b_{ij}$.证明:矩阵$D=(d_{ij})$ 半正定. (2015年中山大学)

100. 我们称一个n阶复方阵A为半正定的,如果$\forall X\in\mathbb{C}^n,X^*AX\geq 0$;称一个线性映射$\varphi:M_n(\mathbb{C})\to M_k(\mathbb{C})$ 为非负的,若A半正定可推出$\varphi(A)$ 半正定.证明:

(1)若A半正定,则$A^*=A$,且A的特征值为非负实数;

(2)若$\varphi:M_n(\mathbb{C})\to M_k(\mathbb{C})$ 为非负的,则$\forall A\in M_n(\mathbb{C}),\varphi(A^*)=\varphi(A)^*$.

注:若A为复矩阵,A^* 表示A的共轭转置.即A^* 的(i,j) 等于A的(j,i) 元的共轭. (2016年中山大学)