国家精品课程厦门大学高等代数: gdjpkc.xmu.edu.cn
国家精品资源共享课高等代数: www.icourses.cn/sCourse/course_3077.html
中国大学MOOC:《高等代数（上）》www.icourse163.org/course/XMU-1001951004
中国大学MOOC:《高等代数（下）》www.icourse163.org/course/XMU-1002554004

国内部分重点高校硕士研究生入学考试高等代数试题
(欧氏空间部分)

一. 填空题

1. 在欧氏空间R^4中, 向量$\alpha=(1,2,2,3)$, $\beta=(3,1,5,1)$的夹角$\langle\alpha,\beta\rangle$=________. (2011年北京交通大学)

2. 在欧氏空间R^4中, 向量$\alpha=(1,1,1,2)$, $\beta=(3,1,-1,0)$的夹角$\langle\alpha,\beta\rangle$=________. (2013年北京交通大学)

3. 设$\mathbb{R}^{2\times1}$中的内积为$\alpha'\beta)=\alpha' A\beta$, $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$, 则$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$在此内积之下的度量矩阵为________. (2015年北京交通大学)

4. 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是欧氏空间$V$的一组标准正交基, $u\in V$, 且$(u,\varepsilon_1)^2+(u,\varepsilon_2)^2+\cdots(u,\varepsilon_n)^2=4$, 则$\|u\|=$________. (2015年北京交通大学)

5. n阶对称正交矩阵按照相似分类, 共有_____类. (2015年北京交通大学)

6. 设$A=(a_{i,j})_{n\times n}$为n阶正交矩阵, 且$a_{11}=-1$, 则矩阵方程$Ax=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$的解为________. (2015年北京交通大学)

7. 设$\alpha_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\alpha_2=(0,1,0)$, $\alpha_3=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}})$, 为欧几里得空间$\mathbb{R}^3$的一个标准正交基, 则$\mathbb{R}^3$中向量$\xi=(2,1,-2)$在$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为________. (2017 年北京交通大学)

8. 在实线性空间$\mathbb{R}^3$, 对于$\mathbb{R}^3$中的向量$\alpha=(x_1,x_2,x_3),\beta=(y_1,y_2,y_3)$, 定义$\mathbb{R}^3$上的二元运算为$(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$,则$\mathbb{R}^3$成为欧氏空间, 在此欧氏空间$\mathbb{R}^3$中, 向量$\alpha=(1,2,2)$的长度是 underline , 向量$\alpha=(1,2,2)$与向量$\beta=(2,-1,0)$之间的夹角是 underline . (2015年大连理工大学)

9. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是3维欧氏空间$V$ 的一组基, 其度量矩阵为$A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$, 向量$\beta=\alpha_1-\alpha_2$, 则$|\beta|=$________. (2013年湖南师范大学)

10. 设$W=L(\alpha_1,\alpha_2)$是欧氏空间$\mathbb{R}^4$中由向量$\alpha_1=(1,1,0,0),\alpha_2=(0,1,1,0)$ 生成的子空间, 则W的正交补空间$W^{\perp}$的一个标准正交基为________. (2015年湖南师范大学)

11. 设3 维欧氏空间 V 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的度量矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. 则向量 $2\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3$ 的长度为_________.

12. 设3 维欧氏空间一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的度量矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则向量 $2\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3$ 的长度为_______.

13. 设 V 为3 维欧氏空间, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 为 V 的标准正交基, 如果基 $\alpha_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3,\alpha_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2,\alpha_3=\varepsilon_1$ 则基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的度量矩阵为_______.

14. 设三阶实对称矩阵 A 的特征值分别为 $a,a,b(a\neq b)$, 如果(1,1,1),(1,0,1) 为 A 的对应于特征值 a 的特征向量, 则矩阵 A 对应于特征值 b 的特征向量为:_______.

15. 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$. 若 A 是酉矩阵, 则_______.

二. 选择题

1. 设A,B均为n阶实对称矩阵, 且均可逆, Λ表示某对角矩阵, 则下列命题中不正确的是( ). (2016年北京交通大学)

   (A)存在可逆矩阵P, 使$P^{-1}(A+B)P=\Lambda$
   (B)存在正交矩阵Q, 使$Q^{-1}(A^{-1}+B^{-1})Q=\Lambda$
   (C)存在正交矩阵Q, 使$Q^T(A^{\star}+B^{\star})Q=\Lambda$
   (D)存在可逆矩阵P, 使$P^{-1}A)P=\Lambda$

2. ( ). (2016年北京交通大学)

   (A) $(ad-bc)^2$ (B) $-(ad-bc)^2$ (C) $a^2d^2-b^2c^2$ (D) $b^2c^2-a^2d^2$

3. 设 V 为 n 维欧氏空间, 则( )
   A. A 中存在非零正交向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+1}$;
   B. V 的任意一个基的度量矩阵是正定矩阵;
   C. 如果 W 是 V 的子空间, 则 W 的正交补 $W^{\perp}$ 不唯一;
   D. V 中标准正交基的过渡矩阵是正交阵.

三.计算题

1. 令$\mathbb{R}[x]_3$的内积为$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$, $\mathbb{R}[x]_3$的基为$f_0=1,f_1=x,f_2=x^2$,试应用施密特正交化方法求$\mathbb{R}[x]_3$的一组标准正交基. (2009 年北京交通大学)

2. 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5$是欧氏空间$V$的一组标准正交基, $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, 其中$\alpha_1=\varepsilon_1+\varepsilon_5$, $\alpha_2=\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_4$, $\alpha_3=2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$, 求$V_1$的一组标准正交基. (2012年北京交通大学)

3. 在欧氏空间$\mathbb{R}^n$中, 设W为

$$\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3-x_4=0,\\ 3x_1+2x_2-2x_4=0,\\ 3x_1+x_2+9x_3-x_4=0.\end{cases}$$

的解空间, 求$W^{\perp}=$? (2013年北京交通大学)

4. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是3维欧氏空间$V$ 的一组基, 这组基的度量矩阵是$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&2&0\\1&0&4\end{pmatrix}$, 求$V$的一组标准正交基. (2015年北京交通大学)

5. 设$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, 求正交矩阵$Q$, 使得$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$. (2011年大连理工大学)

6. 设q_1,q_2,q_3是三个四元实列向量, 并记$Q=(q_1,q_2,q_3)$, 若q_1,q_2,q_3两两正交且长度相等, 则

   (1)求齐次线性方程组$Qx=0$的解空间的维数;

   (2)求$Qx=q_1+2q_2+4q_3$的最小二乘解;

   (3)设v是q_1,q_2,q_3生成的线性空间之外的一个四元列向量, 通过对q_1,q_2,q_3,v进行施密特正交化, 写出第四个正交列向量q_4. (2013年大连理工大学)

7. 设$A=\begin{pmatrix}3&2&1\\2&0&1\\0&0&2\end{pmatrix}$, 求一个正交矩阵$Q$, 使得$Q^{-1}AQ$为对角矩阵. (2013年大连理工大学)

8. 试确定正交矩阵T, 使得$T^{'}AT$为对角矩阵, 其中$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$. (2011年湖南大学)

9. 求正交矩阵Q, 使得Q^TAQ为对角矩阵, 并写出此对角矩阵, 其中$A=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&2&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$. (2015年湖南大学)

10. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是3维欧氏空间$V$ 的一组基, 度量矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&2&-1\\2&-1&6\end{pmatrix}$$

(1)求$\beta=\alpha_1+\alpha_2$的长度.

(2)求参数λ的值, 使得$\gamma=\alpha_1+\alpha_2+\lambda\alpha_3$与$\beta$正交. (2012年湖南大学)

11. 设3阶实对称矩阵A的特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$, 且$\lambda_1$对应的特征向量为$\alpha_1=(0,1,1)'$, 试计算:

(1)求矩阵A对应于特征值1的特征向量;

(2)求矩阵A;

(3)求正交矩阵T, 使得$T'AT$为对角矩阵. (2014年湖南大学)

12. 设$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$是$m\times n$阶实矩阵, $b\in\mathbb{R}^m$是实m维向量, A^T表示矩阵A的转置. 证明:

(1)线性方程组$Ax=b$有解的充要条件是b与齐次线性方程组$Ax=0$的解空间正交;

(2)若线性方程组$Ax=b$无解, 则存在$\widehat{x}\in\mathbb{R}^n$, 使得对$\forall x\in\mathbb{R}^n$, 有

$$\parallel A\widehat{x}-b\parallel\leq\parallel Ax-b\parallel,$$

其中$\parallel x\parallel=\sqrt{<x,x>}$, $<,>$为$\mathbb{R}^n$中内积. (2017年湖南大学)

13. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-2&-2&-2\\-2&1&-2&-2\\-2&-2&1&-2\\-2&-2&-2&1\end{pmatrix}$求一个正交矩阵$T$, 使$T'AT$为对角阵. (2015 年华东师范大学)

14. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}3&1&0&-1\\1&3&-1&0\\0&-1&3&1\\-1&0&1&3\end{pmatrix}$求正交矩阵$Q$, 使得$Q^{-1}AQ$为对角矩阵, 并写出得到的对角矩阵. (2016年华东师范大学)

15. 已知实对称矩阵$A=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}$, 求一个正交矩阵$T$, 使$T'AT$为对角阵. (2017年华东师范大学)

16. 设矩阵$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&2\\-1&2&2\\2&2&1\end{pmatrix}$, 求一个正交矩阵$P$, 使$P^TAP$为对角阵, 并写出该对角阵. (2018年华东师范大学)

17. 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$是欧氏空间$V$上的一组标准正交基, 设

$$\alpha_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3,\ \alpha_2=\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3,\ W=L(\alpha_1,\alpha_2).$$

(1)求W的一组标准正交基;

(2)求$W^\perp$的一组标准正交基;

(3)求$\alpha=\varepsilon_2+2\varepsilon_3$在$W$中的内射影(即求$\beta\in W$, 使$\alpha=\beta+\gamma,\gamma\in W^\perp$), 并求$\alpha$到$W$距离. (2009年华南理工大学)

18. 设V为4维欧氏空间, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 为V的一组标准正交基, 令

$$\alpha_1=\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4,\ \alpha_2=\varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_4,\ \alpha_3=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_4,\ \alpha_4=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3,$$

(1)将$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$化为单位正交的向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$;

(2)求由基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的过渡矩阵;

(3)令$W_1=L(\alpha_1,\alpha_2)$, $U_1=W_1^{\perp}$; $W_2=L(\alpha_2,\alpha_4)$, $U_2=W_2^{\perp}$. 试用基向量$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 表示子空间U_1+U_2, 并确定其维数. (2013年华南理工大学)

19. 已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是三维欧氏空间$V$的一组基, 且这组基的度量矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&2&0\\1&0&4\end{pmatrix},$$

求V的一组标准正交基(用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$表示出来). (2017年华南理工大学)

20. 在 R^n 空间中, 已知线性变换 $\mathscr{A}$ 在任一基 e_i 下的坐标均为 $(1,1,\cdots,1)'$, 其中 e_i 为单位矩阵的第 i 列的列向量.

(1) 求 T 得特征值.

(2) 求 R^n 的一组标准正交基, 使得 T 在这一组基下的矩阵为对角阵.(2010年华中科技大学)

21. 设 α,β,γ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的向量, 并且

$$\alpha+\beta+\gamma=0.$$

(1) 如果 $(\alpha,\beta)>0$, 证明 $(\alpha,\gamma)>0,(\beta,\gamma)>0$, 并且 $|\gamma|>\max\{|\alpha|,|\beta|\}$.

(2) 如果 $(\alpha,\beta)<0$, 证明 $(\alpha,\beta)>\max\{(\alpha,\beta),(\beta,\gamma)\}$, 并且 $|\gamma|>\max\{|\alpha|,|\beta|\}$.

(3) 试说明(1) 与(2) 的几何含义.(2013年华中科技大学)

22. 实质为

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},$$

求正交阵使其对角化.(2015年华中科技大学)

23. 设实对称矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&-2&2\\-2&-1&a\\2&a&b\end{pmatrix}$$

的特征值之和等于0, 特征值之积等于-54. 求 a,b 的值, 并求正交矩阵 T 使得 $T'AT$ 为对角矩阵.

24. 设实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $(b>0)$，已知 A 的全部特征值之和为 1，积为 -12.

(1) 求 a,b 的值;

(2) 求一个正交矩阵 T，使得 $T'AT$ 是对角矩阵.

25. 设3级实对称矩阵 A 的秩为2, $\lambda_1=\lambda_2=6$ 是 A 的二重特征值，$\alpha_1=(1,1,0)'$，$\alpha_2=(2,1,1)'$ 都是 A 的属于特征值6 的特征向量.

1. 求 A 的另一特征值及其全部特征向量.

2. 求矩阵 A .

26. 设$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. 试求一个正交矩阵$T$ 使得$T'AT=D$ 为对角矩阵, 并写出此对角矩阵 D .

27. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 试求一正交矩阵 T , 使 $T'AT$ 成对角形.

28. 已知三维欧几里得空间 V 中一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，其度量矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，求向量 $\beta=2\alpha_1-\alpha_3$ 的长度.

29. 设 $A=\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，求 A 的若尔当标准型 J，并求可逆矩阵 T 使得 $T^{-1}AT=J$.

30. 设实矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

试将 A 写成一个正交矩阵 Q 与一个上三角矩阵 T 的乘积.

31. 设 V 为一个欧氏空间. T 为 V 到 V 的一个映射. 满足条件: $|T\alpha|=|\alpha|,\forall\alpha\in V$. 试问 T 是否一定是 V 上的正交变换? 说明理由.

32. 判断下列论断是否正确, 并说明理由.

设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 为 n 维实线性空间 V 上的两个线性变换，，日 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$，又已知 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 都存在特征向量, 则 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 必存在公共的特征向量.

33. (20 分) 已知矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, 求正交矩阵$Q$ 和上三角矩阵T, 使得$A=QT$.

34. (15 分) 设 A 是3 阶实对称矩阵, 而且 $\det(A)=4$, 特征值为 $1,1,\lambda$, 如果 $\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ 为 A 特征向量, 求 A .

35. $\mathscr{A}\left(x_1,x_2,x_3\right)=\begin{pmatrix}2x_1+x_2+x_3\\x_1+2x_2-x_3\\x_3\end{pmatrix}$, 求线性变换 $\mathscr{A}$ 在一组标准正交基下的矩阵.

36. 求酉矩阵 P, 使 P^*AP 为对角矩阵, 其中 $A=\begin{pmatrix}-1&i&0\\-i&0&-i\\0&i&-1\end{pmatrix}$.

37. 一矩阵 P 称为酉阵, 若 $PP^*=E,P^*$ 为 P 的共轭转置, 求酉阵 P, 使 P^*AP 为对角阵, 其中

$$A=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&0&4\\-3&-4&0\end{pmatrix}$$

38. (20 分) (1)在 R^2 中内积定义为

$$\langle x,y\rangle=4x_1y_1+x_2y_2$$

其中 $x=\left(x_1,x_2\right),y=\left(y_1,y_2\right)'\in R^2$. 令 $S=\{x:\|x\|=1\}$, $\|\|$ 表示向量的长度, 说明 S 是什么形状的图形, 并画出草图.

(2) 令

$$W=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}:2a-b+3c+d=0,\quad a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$$

证明 W 关于矩阵的加法和数乘成为 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 并求出 W 的维数, 给出 W 的一组基.

39. 设V 是实数域上所有 n 阶对称矩阵所构成的线性空间, 对于任意 $A,B\in V$, 定义 $(A,B)=\operatorname{tr}(AB)$ 其中 $\operatorname{tr}(AB)$ 表示矩阵 AB 的主对角线上数的和.

(1) 证明 V 构成一欧氏空间;

(2) 求子空间 $S=\{A|\operatorname{tr}(A)=0\}$ 的维数和一组基;

(3) 求 S 的正交补的一组基和维数.

40. 把3维单位向量

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

扩充为3 维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 的标准正交基.

41. (15 分) 设$V=\mathbb{R}^4$ 是实数域$\mathbb{R}$ 上通常的4 维欧氏空间, $\varepsilon_1=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 和$\varepsilon_2=\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2},\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right)$, 求$V$ 中向量 $\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 使得 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 为 V 的一组标准正交基.

42. 在3 维实向量空间中, 定义 $x=(x_1,x_2,x_3)^T$ 与 $y=(y_1,y_2,y_3)$ 的内积如下:

$$(x,y)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

这样定义了一个欧氏空间, 求这个欧氏空间中的包含 $e_1=(x_1,x_2,x_3)^T$ 在内的一组标准正交基 $\{e_1,e_2,e_3\}$.

43. 设3 阶正定对称实方阵 A 的特征值为 $0,3,3$, 而 $(1,1,1)^T$ 是特征值6 的特征向量, 求 A .

44. 三维欧氏空间 $V=\mathbb{R}^3$ 到自身的一个映射 $\phi:V\to V$ 称为运动, 如果它是一个正交变换与一个平移的合成, 即存在一个正交变换 $\mathscr{A}:V\to V$ 及一个向量 $v_0\in V$ 使得对任意 $v\in V$ 有

$$\phi(v)=\mathscr{A}v+v_0$$

给出一个运动 ϕ, 使得 $\phi(0)\neq 0$ 且 $\phi^5=\mathrm{id}_v$ (这里 $0\in V$ 为零向量, ϕ^5 为5 个 ϕ 的合成, id_v 为 V 到自身的单位映射.)

45. 求齐次线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4-3x_5=0\\x_1+x_2-x_3-x_5=0\end{cases}$$

的解空间(作为 R^5 的子空间) 的一组标准正交基.

46. 设 α,β,γ 为三维欧氏空间 V 的一组标准正交基, 求 V 的一个正交变换 $\mathscr{A}$, 使得

$$\begin{cases}\mathscr{A}(\alpha)=\frac{2}{3}\alpha+\frac{2}{3}\beta-\frac{1}{3}\gamma\\\mathscr{A}(\beta)=\frac{2}{3}\alpha-\frac{1}{3}\beta+\frac{2}{3}\gamma\end{cases}$$

47. 设$\alpha_1=(-1,1),\alpha_2=(-1,-1)$ 为欧氏空间$\mathbb{R}^2$ 的一组基（通常意义内积下），求这组基的度量矩阵. (2014年云南大学)

48. 用Gram-Schmidt正交化方法将$\mathbb{R}^3$ （标准内积）的基$\{(1,1,1)^T,(-1,0,-1)^T,(-1,2,3)^T\}$ 化为标准正交基. (2010年中科大)

49. 考虑2×2 实方阵全体$M_2(R)$ ，对于任给的两个二阶方阵A,B ，我们定义$< A,B >= tr(AB^t)$.这里tr表示迹，t表示矩阵转置.

（1）试证明：$< -,- >$ 是$M_2(R)$ 上的一个内积.

（2）在该内积下，试计算向量组$\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}$ 的Gram-Schmidt标准正交化. (2016年中科大)

50. 设$x=(1,2,2,3),y=(3,1,5,1)$,求x与y的夹角. (2010年中山大学)

51. 设$W=\{(x,y,z):x+y-2z=0\}\subseteq\mathbb{R}^3$,求W的正交补空间. (2010年中山大学)

52. 给定4维标准欧氏空间$\mathbb{R}^4$ 的一个基(e_1,e_2,e_3,e_4) ,以此作为向量组的矩阵记为A,其中$e_1=(1,1,1,0),e_2=(1,0,1,0),e_3=(-1,0,0,1),e_4=(1,-1,-1,1)$.

(1)用正交化方法求$\mathbb{R}^4$ 的一个标准正交基;

(2)求正交矩阵Q及主对角元大于零的上三角矩阵T使得$A=AT$. (2014年中山大学)

四.证明题

1. 设$\mathbb{R}$为实数域, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是$n$维欧氏空间$\mathbb{R}^n$中的一线性无关向量组, 其中$\mathbb{R}^n$中的内积为标准内积$(\alpha,\beta)=\alpha\cdot\beta'$, 这里的向量$\alpha$和$\beta$都看成是$1\times n$矩阵, 用$B$表示$(i,j)$元为$(\alpha_i,\alpha_j)$, $1\le i,j\le s$的$s\times s$ 矩阵, 对向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$施行施密特(Schmidt)正交化过程后得到向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$, 证明: $|B|=\prod\limits_{i=1}^{s}\|\beta_i\|^2$.其中$\|\beta_i\|$表示向量$\beta_i$的长度. (2009年北京大学)

2. 线性变换A是对称变换, 且A是正交变换, 证明A是某个对合(即满足$A^2=E$, E是单位变换). (2010年北京大学)

3. V是内积空间, ξ,η是V中两个长度相等的向量, 证明必存在某个正交变换, 将ξ变到η. (2010年北京大学)

4. 在n维欧氏空间中, 证明两两夹角为钝角的向量个数最大值为$n+1$. (2012年北京大学)

5. 在欧氏空间V中, 对称变换称为"正的", 若对任意$\alpha\in V$, 都有$(\alpha,A(\alpha))\le 0$成立当且仅当$\alpha=0$时等号成立. 证明:

   (1)若线性变换A是正的, 则A可逆.

   (2)若线性变换B是正的且$A-B$也是正的, 则$B^{-1}-A^{-1}$也是正的.

   (3)对于任意正的线性变换A, 总存在正的线性变换B, 满足$A+B^2$. (2014 年北京大学)

6. 用$Euclidean$空间向量的夹角给出n阶正交矩阵的一般形式, 给出证明. (2018年北京大学)

7. 设η是欧氏空间中的一单位向量, 定义$\mathscr{A}(\alpha)=\alpha-2(\eta,\alpha)\eta$. 证明:

   (1)$\mathscr{A}$是正交变换. 这样的正交变换称为镜面反射;

   (2)如果n维欧氏空间中正交变换$\mathscr{A}$以1作为特征值, 且属于特征值1的特征子空间V_1的维数为$n-1$, 则$\mathscr{A}$一定是镜面反射. (2014年北京工业大学)

8. 设φ是欧氏空间V的线性变换, 证明: φ是正交变换的充分必要条件是对于任意$\alpha\in V$, $|\varphi(\alpha)|=|\alpha|$. (2010年北京交通大学)

9. 设A,B为同阶正交矩阵, 证明: 若$|A|+|B|=0$, 则$|A+B|=0$. (2011年北京交通大学)

10. 设T是欧氏空间V的一个线性变换, 如果对任意的$\alpha,\beta\in V$都有$(T(\alpha),\beta)=(\alpha,T(\beta))$, 则称$T$为$V$的一个线性变换. 证明: 欧氏空间$V$的一个线性变换$T$ 是对称变换的充分必要条件是T在V的任意一组标准正交基下的矩阵是对称矩阵. (2012年北京交通大学)

11. 证明: 若λ_0是正交方阵A的特征根, 则λ_0^{-1}也是A的特征根. (2013年北京交通大学)

12. 设V为欧氏空间, 记$\|\star\|$为向量的长度, 证明: 对任意向量$\alpha,\beta\in V$, $|(\alpha,\beta)|\le\|\alpha\|\cdot\|\beta\|$, 而且, 当且仅当$\alpha,\beta$ 线性相关时, 等号才成立. (2014年北京交通大学)

13. 设向量空间$\mathbb{R}^2$按照某种(不一定是通常的)内积方式构成欧氏空间, 记为V^2. 已知V^2的两组基为:

$$(\mathrm{I})\alpha_1=(1,1),\alpha_2=(1,-1);\ (\mathrm{II})\beta_1=(0,2),\beta_2=(6,12).$$

且α_i和β_i的内积为$(\alpha_1,\beta_1)=1$, $(\alpha_1,\beta_2)=15$, $(\alpha_2,\beta_1)=-1$, $(\alpha_2,\beta_2)=3$.

(1)求基(I)的度量矩阵A;

(2)求基(II)的度量矩阵B;

(3)求欧氏空间V^2的一个标准正交基. (2014年北京交通大学)

14. 设V是n维欧氏空间, σ是V的正交变换, $V_1=\{\alpha|\sigma(\alpha)=\alpha,\alpha\in V$, $V_2=\{\beta|\beta=\sigma(\gamma)-\gamma,\gamma\in V$. 求证: $V_2=V_1^{\perp}$. 求中$V_1^{\perp}$表示V_1 的正交补. (2017年北京交通大学)

15. 已知V是n维欧氏空间, $\alpha\in V$, $\mathscr{A}(\xi)=\xi=\frac{2(\xi,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$. 证明:

(1)$\mathscr{A}$为线性变换;

(2)$\mathscr{A}$为正交变换;

(3)$\mathscr{A}^2=\varepsilon$($\varepsilon$为恒等变换);

(4)在一组标准正交基下, $\mathscr{A}$对应的矩阵为$A=diag{-1,1,1,\cdots,1}$. (2016 年北京科技大学)

16. 已知A是正定矩阵, 且$A^2=E$, 证明: $E-A$是奇异的. (2017年北京科技大学)

17. V_1,V_2为欧氏空间V的子空间, 证明: $dimV_1+dimV_2=dim(V_1+V_2)+dim(V_1\cap V_2)$. (2013 年北京师范大学)

18. 设实数域$\mathbb{R}$中所有2阶对称阵构成的子空间V, 在V中定义内积$(A,B)=tr(AB)$.

(1)证明V关于内积$(A,B)=tr(AB)$是一个欧氏空间;

(2)求V的一组标准正交基;

(3)在V中求向量$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ 和$B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$的夹角$\varphi$;

(4)设$C=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, 求子空间$M=B\in V|(B,C)=0$的维数. (2011年大连理工大学)

19. 设$\mathscr{A}$是欧几里得空间V上的一个正交线性变换, 证明: 若W是$\mathscr{A}$的不变子空间, 则正交补$W^{\perp}$也是$\mathscr{A}$的不变子空间. (2012年大连理工大学)

20. 设σ,τ是n维欧氏空间V上的线性变换, σ在V 的一组标准正交基下的矩阵为A.且对$\forall\alpha,\beta\in V$ 有$(\sigma(\alpha),\beta)=(\alpha,\tau(\beta))$, 证明: (1)$\tau$在标准正交基$e_1,e_2,\cdots,e_n$下的矩阵为$A$的转置矩阵$A'$;

(2)若U为σ的不变子空间, 则$U^\perp$为τ的不变子空间;

(3)若σ是可逆的线性变换, 则τ也是可逆的. (2009年湖南大学)

21. 设A为n阶实矩阵, 且$|A|\neq 0$, 证明: A可分解成一正交矩阵Q与一上三角矩阵R的乘积, 即$A=QR$. (2015年湖南大学)

22. 设$\langle,\rangle$为欧氏空间V中的内积, 对V中任意一个单位向量, 定义V上的线性变换$\mathscr{A}_\eta(\alpha)=\alpha-2\langle\eta,\alpha\rangle\eta$, 证明: (1)$\mathscr{A}_\eta$是正交变换;

(2)$\mathscr{A}_\eta^2=id_V$, 这里id_V表示V上的单位变换;

(3)设α,β是V中两个不同的单位向量, 这存在V中一个由单位向量η决定的正交变换$\mathscr{A}_\eta$, 使得$\mathscr{A}_\eta(\alpha)=\beta$. (2017 年湖南大学)

23. 设V是$n\geq 3$维欧氏空间, 对于V中每一非零向量α, 定义:

$$\mathscr{A}_\alpha: V\to V,$$

$$\forall\xi\in V,\mathscr{A}_\alpha(\xi)=2\tfrac{(\xi,\alpha)}{\alpha,\alpha}\alpha-\xi.$$

证明: (1)$\mathscr{A}_\alpha$是正交变换;

(2)$\mathscr{A}_\alpha$的特征值是$-1(n-1$重)与1;

(3)若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$V$的正交基, 则$\mathscr{A}_{\alpha_1}+\mathscr{A}_{\alpha_2}+\cdots+\mathscr{A}_{\alpha_n}$ 是V上的数乘变换. (2009年湖南师范大学)

24. 设V是一个n维欧氏空间, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是V 的自然基, 即$\varepsilon_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)'$(第$i$个分量为1, 其余分量为0), 向量$\xi=(1,2,3,\cdots,n)'$和$\eta=(1,1,\cdots,1)'$, 且$\mathscr{A}$ 是一个由η 决定的镜面反射, 即

$$\mathscr{A}(\alpha)=\alpha-\tfrac{2(\alpha,\eta)}{(\eta,\eta)}\eta,\forall\alpha\in V.$$

写出$\mathscr{A}$在此基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵, 并求出向量$\xi$在$\mathscr{A}$下的像$\mathscr{A}(\xi)$. (2010年湖南师范大学)

25. 设V_1是有限维欧氏空间V的子空间, $V_1{}^\perp$ 是V_1的正交补, 即$V=V_1\bigoplus V_1{}^\perp$, 定义$V$到$V_1$的投射变换$\mathscr{A}$如下:

$$\forall x=x_1+x_2\in V,x_1\in V_1,x_2\in V_1{}^\perp,\mathscr{A}(x)=x.$$

证明：(1)$\mathscr{A}$是V上的线性变换;

(2)$\mathscr{A}$是对称变换且$\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$. (2010年湖南师范大学)

26. 设V是一个n维欧氏空间, V_1,V_2都是V的子空间, 而且

$$dim(V_1) = dim(V_2).$$

证明: V_2中存在非零向量η, 使得$\forall\alpha \in V_1$有$(\alpha, \eta) = 0$. (2011年湖南师范大学)

27.

28. 设V_1是n维欧氏空间V上的一个子空间, $V_1^{\perp}$是V_1的正交补. (1)证明: $V = V_1 \bigoplus V_1^{\perp}$;
(2)设$\mathscr{A}$是V到V_1的投影变换, $\forall\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \in V, \alpha_1 \in V_1, \mathscr{A}(\alpha) = \alpha_1$. 证明: $\mathscr{A}$是V上的对称变换且$\mathscr{A}^2 = \mathscr{A}$. (2012年湖南师范大学)

29. 设A是一实方阵, 证明: 存在正交矩阵S, T以及上三角矩阵P, Q, 使得$A = SP = QT$. (2009年华东师范大学)

30. 已知$W = \mathbb{R}^3$是3维标准的欧氏空间.
(1)设V是由W的向量α, β, γ所张成的平行六面体的体积. 证明: $V = \sqrt{|G(\alpha, \beta, \gamma)|}$, 其中矩阵

$$G(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} (\alpha,\alpha) & (\alpha,\beta) & (\alpha,\gamma) \\ (\beta,\alpha) & (\beta,\beta) & (\beta,\gamma) \\ (\gamma,\alpha) & (\gamma,\beta) & (\gamma,\gamma) \end{pmatrix};$$

(2)设$ABCD$是一个对棱长度均相等的四面体. 假设四面体的三对对棱长度分别为4, 5, 6, 试求该四面体的体积. (2009年华东师范大学)

31. 设A是一个实系数方阵. (1)举例说明: 如果A的行向量组两两正交, 它的列向量组未必两两正交.
(2)证明: 如果A的行向量组是长度相等的正交组, 则它的列向量组也是长度相等的正交组. (2010年华东师范大学)

32. 设$V = \mathbb{R}^n$是带有标准内积(α, β)的n维欧氏空间, α是V中任意给定的非零向量. 定义V的反射变换σ_α如下:

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - 2\frac{\beta,\alpha}{\alpha,\alpha}\alpha, \beta \in V$$

. (1)证明: 此反射变换是正交变换;
(2)证明: 此反射变换可对角化;
(3)假设$n = 2$, $\alpha = (a, b)$, 求σ_α在自然基$e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$下的矩阵;
(4)假设$n = 2$, 证明: V的每个正交变换均可写成不超过两个反射变换的乘积. (2010年华东师范大学)

33. 设(a, b)是欧几里得空间V的内积函数, 对于任何给定的$\gamma \in V$, 定义V的函数$f_\gamma : \alpha \to (\alpha, \gamma)$, 即$f_\gamma(\alpha) = (\alpha, \gamma)$. 证明:
(1)f_γ是V的线性函数;
(2)V的线性函数都具有f_γ的形式. (2013年华东师范大学)

34. 证明: 任何实系数可逆矩阵A, 存在正交矩阵Q以及上三角矩阵R, 使得$A = QR$, 且如果要求T的主对角线上的元素均大于零, 则此分解是唯一的. 对

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

求这样的分解. (2013年华东师范大学)

35. 设V是实数域上的n维欧氏空间, $e_1, \cdots, e_n$ 是一组基, 满足内积$(e_i, e_j) \leq 0 (i \neq j)$. (1)证明: 存在一个非零向量$v \in V$, 满足$(e_i, v) \geq 0, (i = 1, 2, \cdots, n)$; 、、(2)假设$v = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n \in V$是任何满足(1)的向量, 证明: $a_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, n$; (3)设$u = b_1e_1 + \cdots + b_ne_n \in V$是另一个满足(1)的向量, 并定义$w = c_1e_1 + \cdots + c_ne_n \in V$, 其中$c_i = min\{a_i, b_i\}, i = 1, 2, \cdots, n$, 证明: 向量$w$也满足(1). (2014年华东师范大学)

36. 设V是全体n阶实系数矩阵构成的的线性空间, 定义运算

$$A, B = Tr(A^TB), A, B \in V.$$

(1)证明: $(,)$是内积, V是n^2维欧氏空间;

(2)设$T \in V$是给定矩阵, 定义映射$\phi(A) = TA, A \in V$, 证明: ϕ是V上的线性映射;

(3)求ϕ的伴随算子. (2016年华东师范大学)

37. 在欧氏空间中有三组向量: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$; $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 和$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s$. 如果$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$是线性无关的, $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 和$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s$都是两两正交的单位向量, 并且对一切$i, 1 \leq i \leq s$, 均有

$$L(\alpha_1, \cdots, \alpha_i) = L(\beta_1, \cdots, \beta_i) = L(\gamma_1, \cdots, \gamma_i).$$

证明: 对每一个i, 有$\beta_i = \pm\gamma_i$. (2010年华南理工大学)

38. 设A, B都是实对称矩阵, 证明: 当且仅当$AB = BA$时, 有正交矩阵Q, 使$Q^{-1}AQ$与$Q^{-1}BQ$同时为对角矩阵. (2010年华南理工大学)

39. 设$\mathscr{A}$是欧氏空间V的一个线性变换, 且$\mathscr{A}$ 在标准正交基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1)证明: $\mathscr{I}$(恒等变换), $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}^2$ 线性相关;

(2)求V的一组标准正交基, 使$\mathscr{A}$在该基下的矩阵为对角矩阵. (2012年华南理工大学)

40. 设$V=\mathbb{R}_n[x]$, 若$f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$, $g(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}b_ix^i\in V$, 规定内积$(f(x),g(x))=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ib_i$, 则$V$为欧氏空间, 令$W=\{f(x)\in V|f(1)=0\}$. (1)证明$W$为$V$的子空间, 决定其维数并举出它的一组标准正交基;
(2)举出$W^{\perp}$的一组标准正交基. (2016年华南理工大学)

41. 设A,B均为n阶正交矩阵, 满足$|A|+|B|=0$. 证明: $|A+B|=0$. (2016年华南理工大学)

42. 设$\mathscr{A}$是n维欧氏空间V的线性变换. 证明: 对$\forall\alpha\in V$都有

$$(\mathscr{A}(\alpha),\alpha)\geq 0$$

的充分必要条件是$\mathscr{A}$的特征值全是非负数. (2017年华南理工学)

43. 设 $\mathscr{A}$ 是欧氏空间 E 内的一个线性变换, 对任意的向量 α,β 都有

$$\langle\mathscr{A}\alpha,\beta\rangle=\langle\alpha,\mathscr{A}\beta\rangle.$$

(1)证明 $\mathscr{A}$ 的特征值都是实数.
(2)是否可以找到空间的基，使得 $\mathscr{A}$ 对应的矩阵是对角矩阵？证明你的结论.
(3)取 $E=\mathbb{R}^3$, 以及它的一个标准正交基 $\{e_1,e_2,e_3\}$. 已知 $\mathscr{A}(e_1)=\mathscr{A}(e_2)=\mathscr{A}(e_3)=e_1+e_2+e_3$, 求 $\mathbb{R}^3$ 的另一个标准正交基，使得 $\mathscr{A}$ 对应的矩阵是对角矩阵.(2009年华中科技大学)

44. 设 V 是 n 维欧氏空间, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一组基, 证明: 对于任意一组实数 $b_1,b_2,\cdots,b_n$, 恒有一个向量 $\alpha\in V$, 使得

$$(\alpha,\alpha_i)=b_i,i=1,2,\cdots,n.$$

45. 设 V 为 n 维欧氏空间, 一组标准正交基为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 证明: 对任意 r, 存在空间 $w_1,w_2,\cdots,w_\gamma$, 使得所有的 $\alpha_i\notin w_1\cup w_2\cup\ldots w_\gamma$.(2017年华中科技大学)

46. (1) 请叙述酉空间的定义.
(2) 设 V 是一个 n 维复向量空间, $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$ 是 V 的任意一组基. 证明: 一定可以在 V 上定义一个埃尔米特内积 $\langle *,*\rangle$, 使得 V 成为一个酉空间且 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$ 是 V 的一组标准正交基. (2014年华中科技大学)

47. 设 $\mathbb{R}^n$ 表示所有 n 维实列向量构成的实向量空间, A 是一个实正定矩阵.
(1) 证明: 由 $(X,Y)=X^TAY$, 这里 $X,Y\in\mathbb{R}^n$ 且 X^T 表示 X 的转置. 定义了 $\mathbb{R}^n$ 上的一个正定的, 对称的双线性型。从而使得 $\mathbb{R}^n$ 成为一个欧氏空间.
(2) 求上述欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基.(2016年华中科技大学)

48. 令 $\mathbb{R}_2$ 表示实数域 R 上的次数不超过2 次的多项式构成的实向量空间.

(1) 证明: 对任意的 $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_2$,

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x$$

是 $\mathbb{R}_2$ 上的一个内积.

(2) 将 $\mathbb{R}_2$ 的基底 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x, x^2\right\}$ 标准正交化, 求出标准正交基.

49. 设 A 是 n 级正交矩阵, 其特征值均为实数.证明: A 是对称矩阵.

50. 设 A, B 是可交换的实对称矩阵. 证明: 存在正交矩阵 T 使得 $T^{-1}AT, T^{-1}BT$ 都是对角矩阵.

51. 设 A 是 n 级实矩阵. 证明: 存在 n 级正交矩阵 T_1 和 T_2 使得

$$T_1AT_2 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_n \end{pmatrix}$$

其中 $\gamma_1^2, \gamma_2^2, \cdots, \gamma_n^2$ 是 A^TA 的特征值.

52. 设 A 是 n 级实矩阵. 证明: A 正交相似于一个上三角矩阵的充分必要条件是 A 的特征多项式在复数域中的根都是实数.

53. 设 σ 为 n 维欧几里得空间 V 上的一个对称变换，σ 的特征多项式为

$$f(x) = (x-\lambda_1)^{r_1}(x-\lambda_2)^{r_2}\cdots(x-\lambda_m)^{r_m},$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 互.不相同, $r_i \geqslant 1, i = 1, 2, \cdots, m$. 证明: 对 $i = 1, 2, \cdots, m$

$$\operatorname{Ker}(\sigma - \lambda_i\varepsilon) = \operatorname{Ker}(\sigma - \lambda_i\varepsilon)^{r_i}$$

其中 ε 表示 V 上的恒等变换.

54. 设 σ 是 n 维欧氏空间 V 上的一个线性变换. 证明下列条件等价:

(1) σ 是正交变换;

(2) σ 保持向量的长度不变, 即对于任意 $\alpha \in V, |\sigma(\alpha)| = |\alpha|$.

55. 设 A 为 n 级正定矩阵, B 为 n 级实对称矩阵. 证明: 存在实可逆矩阵 P 使得 $P'AP = E_n, P'BP$ 对角矩阵.

56. 3.5em 14.（15 分）已知 A, B 是 n 级复方阵, 且 $AB = BA$, 证明存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 与 $P^{-1}BP$ 同时为上三角矩阵.

57. 证明: 对任意 n 阶实对称矩阵 A, 存在正交矩陈 T, 使得 $T'AT = T^{-1}AT$ 为对角矩阵.

58. n 维欧氏空间的两组基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 和 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 称为对偶基, 如果

$$(e_i, f_j) = \begin{cases} 1, \ i = j, \\ 0, \ i \neq j. \end{cases}$$

(1) 证明: 对 V 的任一组基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$, 其对偶基存在并且唯一确定.

(2) 设 $e_1 = (1,0,0), e_2 = (1,1,0), e_3 = (1,1,1)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, 试求 e_1, e_2, e_3 的对偶基.

59. 设 α, β 为 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的两个非零列向量.则 $\alpha^T\beta > 0$ 的充分必要条件是存在正定矩阵 A 使得 $\beta = A\alpha$.

60. 已知 A, B 是两个行列式为1 的二级正交方阵, 求证 $AB = BA$.

61. 设 A 是 n 级正交矩阵且 $|A| = 1$,

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

是 A 的特征多项式. 证明:

1. 当 n 为偶数时, 对任意的 $0 \leqslant i \leqslant n$, 有 $a_i = a_{n-i}$.
2. 当 n 为奇数时, 对任意的 $0 \leqslant i \leqslant n$, 有 $a_i = -a_{n-i}$.
3. 当 $n = 2$ 时, 存在正交矩阵 B 使得 $A = B^2$.

62. 设 A 和 C 都是 n 级正定矩阵, 并且 B 是矩阵方程 $AX + XA = C$ 的惟一解. 证明: B 是正定矩阵.

63. 设 A 和 B 是 n 级实矩阵, 并且. AB 和 BA 都是对称矩阵, 证明: 存在正交矩阵 T, 使得 $T^{-1}ABT = BA$.

64. 设分块实对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta' & 0 \\ \beta & A_1 & \gamma \\ 0 & \gamma' & b \end{pmatrix}$, 其中 $a, b \in \mathbb{R}, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^n, A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 证明: A 正定的充要条件是 $a > 0, b > 0$ 且矩阵 $A_1 - \frac{1}{a}\beta\beta' - \frac{1}{b}\gamma\gamma'$ 正定.

65. 设 $\mathscr{A}$ 是欧氏空间 V 的一个正交变换，λ 和 μ 是 $\mathscr{A}$ 的两个不同特征值，设 $\mathscr{A}$ 的属于 λ 的特征向量为 α, 属于 μ 的特征向量为 β. 证明: α 与 β 是正交的.

66. 证明: 在 n 维欧氏空间中, 至多有 $n+1$ 个向量使得其中任意两个向量之间的夹角均大于 90° .

67. 设 A 是 n 级实对称矩阵并且恰好有 r 个不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$. 证明存在矩阵 $A_1, A_2, \cdots, A_r$ 满足条件:

(1) $A_1 + A_2 + \cdots + A_r = E_n$;

(2) $A_i^2 = A_i, i = 1, 2, \cdots, r$;

(3) $A_iA_j = 0, i \neq j$;

(4)$A = \lambda_1A_1 + \lambda_2A_2 + \cdots + \lambda_rA_r$.

68. 设 A 为 n 级可逆实矩阵. 证明: 存在 n 级正交矩阵 P 和 Q, 使得 $P'AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$.其中 $\lambda_i>0$, 且 λ_i^2 为 $A'A$ 的特征值 $(i=1,2,\cdots,n)$.

69. 设 A 为反对称实矩阵, λ 是 A 的一个非零特征值, $\alpha+i\beta$ 为 A 的属于 λ 的复特征向量,其中 α 和 β 均为实向量, 证明:

(1) λ 为纯虚数;

(2) α 和 β 的长度相等且互相正交.

70. 设 A 为 n 级实对称矩阵, 记它的特征值为 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$. 设 A 的属于 λ_1 的一个特征向量为 μ_1. 证明:

$$\min_{\substack{x\neq 0\\ x\perp\mu_1}}\frac{x'Ax}{x'x}=\lambda_2.$$

71. 设 η 是 n 维欧氏空间 V 的一个单位向量, 定义变换 $\mathscr{A}$ 为 $\mathscr{A}\alpha=\alpha-2(\alpha,\eta)\eta$. 证明:

(1) $\mathscr{A}$ 是对称变换;

(2) $\mathscr{A}$ 是正交变换.

72. 设 A 为 n 阶正交矩阵, 且 -1 不是 A 的特征值. 证明: $B=(A-E_n)(A+E_n)^{-1}$ 是反对称矩阵且 $A=(B-E_n)(B+E_n)^{-1}$.

73. T 为欧氏空间 V 上的线性变换, $\forall x,y\in V$ 满足 $(Tx,y)=(x,Ty)$ 或 $(Tx,y)=-(x,Ty)$. 证明: T 为对称变换或反对称变换.

74. 设 $\alpha\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ 上的标准度量下 α 为单位向量. 证明: 必存在一个 n 阶实对称正交矩阵 A 使得 α 为 A 的第一列.

75. (15 分) 设A, B 为n 阶实正交矩阵, 且$|A+B|=|A|-|B|$. 证明: $|A|=|B|$.

76. 设 A 为 n 阶方阵, 已知 A 的特征值全为实数, 且 $AA'=A'A$. 证明: A 必为对称矩阵.

77. 设 A 为实对称正定矩阵, 证明: A 中元素之最大者必位于 A 的对角线上.

78. 设 A 为 n 维欧氏空间 V 上的对称变换, 证明对 V 中任意的单位向量 x, 都有 $|Ax|^2\leq\left|A^2x\right|$.

79. 设 α 是 $\mathbb{R}^n$ 中标准度量下的单位向量, 即 $|\alpha|=1$, 证明必存在一个 n 级实对称正交矩阵 A 使得 A 的第一列为 α .

80. A,B 为 n 级实对称矩阵, 且 A 是正定的, 证明: 存在 n 级可逆矩阵 P 使得 $P'AP,P'BP$ 同时为对角阵.

81. 设 V 是 n 维欧氏空间, $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是 V 的一组基, 求证 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 的度量矩阵 A 是正定矩阵.

82. 设 A 是 n 阶实对称矩阵, , 且 $A^2=E$, 试证明: 存在正交矩阵 T, 使得

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & -E_{n-r} \end{pmatrix}$$

83. 设 V 是 n 维欧氏空间, $\mathscr{A}$ 是 V 上对称变换, 求证: 存在标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$, 使得 $\mathscr{A}$ 在此组基下的矩阵为对角矩阵.

84. 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 求证存在正交矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

85. 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维欧氏空间中的正交变换，V_1 是 V 的 $\mathscr{A}-$ 不变子空间. 证明: V_1 的正交补也是 V 的 $\mathscr{A}-$ 不变子空间.

86. 证: 任意正交矩阵都可以表示为两个实对称矩阵的乘积.

87. 设 $\mathscr{A}$ 为Euclid 空间 V 上的正规变换, 即 $\mathscr{A}\mathscr{A}^*=\mathscr{A}^*\mathscr{A},U$ 是 $\mathscr{A}-$ 不变子空间, 证明 U 也是 $\mathscr{A}^*-$ 不变子空间, 因此 $\mathscr{A}$ 在U 上的限制仍是正规变换.

88. n 维欧氏空间的两组基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 和 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 称为对偶基, 如果

$$(e_i,f_j)=\begin{cases} 1,\ i=j \\ 0,\ i\neq j \end{cases}$$

(1) 证明: 对 V 的任一组基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$, 其对偶基存在并且唯一确定.

(2) 设 $e_1=(1,0,0),e_2=(1,1,0),e_3=(1,1,1)$ 为 R^3 的一组基, 试求 e_1,e_2,e_3 的对偶基.

89. 设 V 是 n 维欧氏空间, V_1,V_2 是 V 的子空间, 且 $\dim V_1<\dim V_2$. 证明: V_2 存在一个非零向量, 它与 V_1 中任一个向量正交.

90. 对于任一实可逆矩阵 A , 都存在正交矩阵 Q_1,Q_2, 使得

$$Q_1AQ_2=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

其中 $\lambda_n\geq\lambda_{n-1}\geq\cdots\geq\lambda_1>0$, 且 $\lambda_1^2,\cdots,\lambda_n^2$ 都是 $A'A$ 的特征值.

91. 记 $X=\mathbb{R}^n$ 为实数域 $\mathbb{R}$ 上 n 维标准欧氏空间, A 为实数域 $\mathbb{R}$ 上的一个 n 阶方阵,

$$V=\{\xi|\xi\in X,A^T\xi=0\}$$
$$W=\{A\xi|\xi\in X\}$$

其中 A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵, 证明: $X=V\oplus W$.

92. 设 A 是行列式为-1 的正交矩阵, 证明: -1 是 A 的一个特征值.

93. (15 分) 设T 为2 阶实正交阵, 且不是单位阵. 证明: $\det(T) = -1$ 当且仅当存在2 元实向量$v \neq 0$ 使得

$$Tv = v.$$

94. 设4 维欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 如

$$V = \{(a, b, -a, -b) | a, b \in \mathbb{R}\}$$

证明 V 是一个线性子空间, 求出 V 的一组标准正交基, 并求 V 在 $\mathbb{R}^4$ 中的正交补空间.

95. 设V是n维欧氏空间，其内积为(,) .设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in V$ 满足如下的条件：如果非负实数$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 使得$\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_m\alpha_m = 0$ ，那么必有$\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$.证明：必然存在向量$\alpha \in V$ 使得$(\alpha, \alpha_i) > 0, i = 1, \cdots, m$.(2010年四川大学)

96. 设V是n维欧氏空间，内积为(,) .

（1）设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是V中的一个线性无关的向量组.证明如下的Schmidt正交化定理：存在V中的一个两两正交的向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 满足：对任意$1 \leq k \leq s$ 有，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 与$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ 等价.

（2）设V中的任意一个向量组$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_t$ ，证明：$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_t$ 线性无关的充分必要条件是矩阵$\begin{pmatrix} (\gamma_1, \gamma_1) & \cdots & (\gamma_1, \gamma_t) \\ \vdots & & \vdots \\ (\gamma_t, \gamma_1) & \cdots & (\gamma_t, \gamma_t) \end{pmatrix}$ 是正定矩阵.(2011年四川大学)

97. 设

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

在实向量空间$\mathbb{R}^3$ 上定义二元函数(,) 为：$(X, Y) = X'AY, X, Y \in \mathbb{R}^3$.证明：(,) 是$\mathbb{R}^3$ 上的一个内积，并写出$\mathbb{R}^3$ 的一个关于这个内积的一组标准正交基. (2015年四川大学)

98. 设V是n维欧氏空间.

（1）设$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是V上的对称变换，满足$\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$.证明：存在V的一组基，使得$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 在这个基下的矩阵都是对角阵.

（2）证明：V上的任意正交变换$\mathcal{J}$ 的任意特征值λ 都满足$|\lambda| = 1$.

（3）是否存在V上的正交变换$\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ 使得$\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$ 是V上的正交变换？说明理由. (2016年四川大学)

99. 设A是n阶实对称矩阵，证明：A是正定的当且仅当A是某个欧氏空间的内积的度量阵. (2019年四川大学)

100. 设V是欧氏空间，其内积为$(-,-)$，设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是V的一组基.

(1) 证明：存在V的唯一的一组基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 使得$(\alpha_i,\beta_j)=\delta_{ij},1\le i,j\le n$，其中$\delta_{ii}=1(1\le i\le n)$且$\delta_{ij}=0(1\le i\ne j\le n)$.

(2) 已知$(\alpha_i,\alpha_j)\le 0,1\le i\ne j\le n$.设$\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\alpha_i\in V$ 满足$(\alpha,\alpha_i)\ge 0,1\le i\le n$.证明：$k_i\ge 0,1\le i\le n$.(2019年四川大学)

101. 设在n维欧氏空间V，向量α,β 的内积记为(α,β)；T为V的线性变换，对于$\alpha,\beta\in V$：定义二元函数$f(\alpha,\beta)=(T(\alpha),T(\beta))$.问$f(\alpha,\beta)$ 是否为V的内积？请阐述理由. (2011年武汉大学)

102. 设W是n维欧氏空间V的子空间，$\alpha\in V$.定义α 到W的距离

$$d(\alpha,W)=(\alpha-\alpha'),$$

其中α' 为α 在子空间W上的正交投影.证明：若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为W的一个基，则

$$d(\alpha,W)=\sqrt{\frac{|G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha)|}{|G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)|}},$$

其中$|G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)|$ 为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的Gram矩阵. (2013年武汉大学)

103. 设φ 是欧氏空间V上的正交变换，且$\varphi^m=\varepsilon,m>1$，记$W=\{x\in V|\varphi(x)=x\},W_\varphi^\perp$ 为其正交补，对任意的$\alpha\in V$，若有$\alpha=\beta+\gamma$，其中$\beta\in W_\varphi,\gamma\in W_\varphi^\perp$，证明：

$$\beta=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\varphi^{i-1}(\alpha).$$

(2014年武汉大学)

104. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为n维欧氏空间V的一组基，证明：这组基是标准正交基的充要条件是：对V 中任意向量α 都有

$$\alpha=(\alpha,\alpha_1)\alpha_1+(\alpha,\alpha_2)\alpha_2+\cdots+(\alpha,\alpha_n)\alpha_n.$$

(2010年湘潭大学)

105. 证明：n维欧氏空间V的每一子空间V_1 都有唯一的正交补. (2011年湘潭大学)

106. 令$\mathcal{A}$ 为n维欧氏空间V上的线性变换，如果对于任意$\alpha,\beta\in V$ 都有

$$(\mathcal{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathcal{A}\beta),$$

则称$\mathcal{A}$ 为对称变换.证明：

(1) $\mathcal{A}$ 为对称变换当且仅当$\mathcal{A}$ 在V的一组标准基下的矩阵是对称矩阵.

(2) 如果V_1 是$\mathcal{A}-$ 子空间，则正交补$V_1^\perp$ 也是$\mathcal{A}-$ 子空间. (2016年湘潭大学)

107. 令$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为欧氏空间$\mathbb{R}^2$ 的列向量，定义n阶矩阵$G=(g_{ij})$ ，其中$g_{ij}=(\alpha_i,\alpha_j)$ 为α_i 与α_j 的内积.证明：

（1）G为正定矩阵当且仅当$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

（2）令$X=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ ，则存在正定矩阵A使得$G=X'AX$.(2017年湘潭大学)

108. 设V是n维欧氏空间，$0\neq\alpha\in V,V_1=\{x\in V|(x,\alpha)=0$.

（1）证明：V_1 是V的子空间;

（2）求V_1 的维数$dimV_1$.(2013年云南大学)

109. 设V是n为欧氏空间，$\alpha\in V,\alpha$ 非零，$\alpha^{\perp}=\{\beta|(\beta,\alpha)=0,\beta\in V\}$ ，证明：$\alpha^{\perp}$ 是V的子空间，并求$\alpha^{\perp}$ 的维数. (2017年云南大学)

110. 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 是欧氏空间V中的一组两两正交的单位向量，α 是V中任意一个向量.证明Bessel不等式：

$$\sum_{i=1}^{k}(\alpha,\alpha_i)^2\leq|\alpha|^2.$$

并证明向量$\beta=\alpha-\sum_{i=1}^{k}(\alpha,\alpha_i)\alpha_i$ 与每个向量α_j 都正交. (2010年浙江大学)

111. 设B 是实数域上n阶矩阵，$A=B^TB$ ，对任意一个大于0的常数a，证明$(\alpha,\beta)=\alpha^T(A+aE)\beta$ 定义了$\mathbb{R}^n$ 的一个内积使得$\mathbb{R}^n$ 成为欧氏空间.其中α^T 表示列向量α 的转置，E是n阶单位矩阵. (2011年浙江大学)

112. 设ϕ 是n维欧氏空间的正交变换，证明ϕ 最多可以表示为$n+1$ 个镜面反射的复合. (2012年浙江大学)

113. 定义ψ 为$[0,1]$ 到n阶方阵全体组成的欧氏空间的连续映射，使得$\psi(0)$ 为第一类正交矩阵，$\psi(1)$ 为第二类正交矩阵.证明：存在$T_0\in(0,1)$ ，使得$\psi(T_0)$ 退化. (2014年浙江大学)

114. 令$\mathbb{T}$ 是欧氏空间V的线性变换，而$\mathbb{T}^*$ 是$\mathbb{T}$ 的伴随线性变换，即对任意的$v,w\in V$ 有$<\mathbb{T}(v),w>=<v,\mathbb{T}^*(w)>$.

（1）当V为有限维欧氏空间，$\mathbb{T}$ 在一组单位正交基下的矩阵为A时，求$\mathbb{T}^*$ 在该基下的矩阵.

（2）证明：$(Im(\mathbb{T}^*))^{\perp}=ker(\mathbb{T})$.(2016年浙江大学)

115. 设V是n维欧氏空间，$(,)$ 为其内积，V^* 为其对偶空间.证明：

（1）对于每个给定的$\alpha\in V$ ，映射$f_\alpha:V\to\mathbb{R},\beta\mapsto(\alpha,\beta)$ 是V^* 中的一个元素.

（2）映射$f:V\to V^*,\alpha\mapsto f_\alpha$ 是n维线性空间V到V^* 的同构映射. (2010年中科大)

116. 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是欧氏空间V的任意n个向量$n\geq1,G=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1)&(\alpha_1,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_1,\alpha_n)\\(\alpha_2,\alpha_1)&(\alpha_2,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_2,\alpha_n)\\\vdots,\vdots,&&\vdots&\\(\alpha_n,\alpha_1)&(\alpha_n,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_n,\alpha_n)\end{pmatrix}$ ，

其中$\alpha_i,\alpha_j)$ 是V的内积.

求证：G正定的充要条件是$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关. (2011年中科大)

117. 设$\mathbb{R}^{2\times 2}$ 上的线性变换$\mathcal{A}(X)=AX-XA$，其中$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$.

（1）求证：$f(X,Y)=tr(X^TAY)$ 是$\mathbb{R}^{2\times 2}$ 上的内积;

（2）求$Im\mathcal{A}$ 在f 下的一组标准正交基. (2012年中科大)

118. 已知欧氏空间V上的非零线性变换$\mathcal{A}$ 保持向量的夹角不变.求证：存在实数λ 使得$\lambda\mathcal{A}$ 是正交变换. (2014年中科大)

119. 设u是欧氏空间$\mathbb{R}^5$ 中的单位向量,定义$T_u(x)=x-2(x,u)x$.现设α,β 是$\mathbb{R}^5$ 中线性无关的两个单位向量,问当α,β 满足什么条件时,存在正整数k使得$(T_\alpha T_\beta)^k$ 为单位映射. (2014年国科大)

120. 设$\mathbb{R}_n[x]$ 是次数小于n的多项式空间,证明$\int_0^1 f(x)g(x)dx$ 为$\mathbb{R}_n[x]$ 上的内积,因而$\mathbb{R}_n[x]$ 是欧氏空间. (2019年国科大)

121. 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 是欧氏空间V的一个标准正交基,$\mathcal{A}$ 是V的线性变换,且

$$\begin{cases}\mathcal{A}(\varepsilon_1)=\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_4,\\ \mathcal{A}(\varepsilon_2)=\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3,\\ \mathcal{A}(\varepsilon_3)=-\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4,\\ \mathcal{A}(\varepsilon_4)=-\varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_4.\end{cases}$$

(1)证明$\mathcal{A}$ 是一个对称变换.

(2)求V的一个标准正交基,使得$\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵为对角阵. (2010年中南大学)

122. 设V是所有n阶实对称矩阵构成的线性空间.$\forall A,B\in V$,定义$(A,B)=tr(AB')$,其中$tr(AB')$ 表示矩阵AB' 的迹.

(1)证明V关于(A,B) 构成一个欧氏空间.

(2)求V的维数.

(3)求$S=\{A\in V|tr(A)=0\}$ 的正交补的维数.

(4)证明$f(A,B)=(A,B)$ 是V上的双线性函数. (2012年中南大学)

123. 设M是n维欧氏空间V的一个子空间,$(\cdot,\cdot)$ 是V的内积. ,记$|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$.证明:$\forall\beta\in V$,存在唯一$\gamma_0\in M$,使得

$$|\beta-\gamma_0|=\min_{\gamma\in M}|\beta-\gamma|.$$

(2013年中南大学)

124. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 是n维欧氏空间V中两组向量,$(\cdot,\cdot)$ 是V的内积.证明:存在正交变换$\mathcal{A}$,使得$\mathcal{A}\alpha_i=\beta_i,i=1,2,\cdots,m$ 成立的充要条件是

$$(\alpha_i,\alpha_j)=(\beta_i,\beta_j),i,j=1,2,\cdots,m.$$

(2014年中南大学)

125. 设V是n维欧氏空间,$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是V的一组标准正交基,$(\cdot,\cdot)$ 是V的内积.对于给定的非零实数k和非零向量$\xi \in V$,定义V上的线性变换$\mathcal{A}$ 为

$$\mathcal{A}(\alpha)=\alpha+k(\alpha,\xi)\xi(\forall \alpha \in V).$$

(1)求$\mathcal{A}$ 在基$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 下的矩阵A.

(2)求A的行列式.

(3)证明:$\mathcal{A}$ 是正交变换的充要条件是$k=-\dfrac{2}{(\xi,\xi)}$.(2016年中南大学)

126. 设$\mathcal{A}$ 是n维欧氏空间V的一个线性变换,且$\forall \alpha,\beta \in V,(\mathcal{A}(\alpha),\beta)=(\alpha,\mathcal{A}(\beta))$.证明:

$$[Im(\mathcal{A})]^{\perp}=ker(\mathcal{A}).$$

(2018年中南大学)

127. 设σ 是n维欧氏空间V的一个正交变换,且满足条件:$\sigma^2+id_V=0$.证明:对任意$x \in V$,有$|x|=|\sigma(x)|=|\sigma^*(x)|$.(σ^*表示σ的伴随变换,$|x|$表示x的长度) (2010年中山大学)

128. 设σ 是n维欧氏空间V的一个正规变换,且满足条件:$\sigma^2=id_V$.证明:σ 既是对称变换,也是正交变换.(2012年中山大学)

129. 设σ 为n维欧氏空间V上的投影变换,即$\sigma^2=\sigma$.证明:若$\forall \alpha \in V,|\sigma(\alpha)| \le |\alpha|$,则$ker\sigma \perp Im\sigma$.(2016年中山大学)

130. 记$V=M_n(\mathbb{R}),U=\{A \in V|A^T=A\},W=\{B \in V|B^T=-B\}$.在V上定义二元函数$f:V \times V \to \mathbb{R},f(A,B)=tr(AB^T),\forall A,B \in V$.

(1)证明:(V,f) 是欧氏空间;

(2)证明:$U \perp W,V=U \oplus W$;

(3)设$A \in V$,试求$B \in U$ 使得A与B的距离最短,即$\forall D \in U$,有$d(A,B) \le d(A,D)$.(2016年中山大学)

131. 设V为一个n维欧氏空间,σ 为V上的一个线性变换.若有单位向量η 使得$\sigma(\alpha)=\alpha-2(\eta,\alpha)\eta$,则称σ 为镜面反射.这里(η,α) 表示η 与α 的内积.

(1)若σ 是镜面反射,证明:V有正交分解$V=ker(id_V+\sigma) \oplus ker(id_V-\sigma)$.这里id_V 表示V上的恒等变换.对于线性变换$\sigma,ker(\sigma)$ 表示σ 的核空间.

(2)若α,β 为V上两个线性无关的单位向量,求一个镜面反射τ 使得$\tau(\alpha)=\beta$.(2017年中山大学)