国内部分重点高校硕士研究生入学考试高等代数试题
(λ–矩阵部分)

一. 填空题

1. λ–矩阵$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2\lambda-1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^3+\lambda-1 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$的不变因子为________. (2010年北京交通大学)

2. λ–矩阵$\begin{pmatrix} \lambda^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)^3 \end{pmatrix}$的标准型为________. (2011年北京交通大学)

3. 设λ–矩阵$A(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$, 则$A(\lambda)$的标准型为________. (2012年北京交通大学)

4. λ–矩阵$\begin{pmatrix} \lambda^2+1 & \lambda^2 & -\lambda^2 \\ 1 & \lambda^2+\lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$的标准型为________. (2013年北京交通大学)

5. 若A是十阶非零矩阵且$A^2=0$, 则A的$Jordan$标准型中$Jordan$块的最大阶数为________. (2015年北京交通大学)

6. 设矩阵A的特征多项式为$(\lambda+1)^3(\lambda-2)^2(\lambda+3)$, 极小多项式为$(\lambda+1)^2(\lambda-2)^2(\lambda+3)$, 则$A$的$Jordan$标准型是________. (2015年北京交通大学)

7. 设矩阵A的初等因子为$(\lambda-1)^2, (\lambda-2)^2$, 则$A$的$Jordan$标准型是________. (2013年北京科技大学)

8. 设四阶矩阵A的特征多项式为$m(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$, 写出$A$的所有可能的$Jordan$标准型________.(2015年大连理工大学)

9. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 如果将 A 看成复数域上的矩阵, 则其 Jordan 标准型为_______, 如果将 A 看成有理数域上的矩阵, 其有理标准型为_______.

10. 设4级数字矩阵 A 的最小多项式为 $(\lambda+1)^3$, 则 A 的全部不变因子为_______.

11. 设4级数字矩阵 A 的最小多项式为 $(\lambda+1)^3$, 则 A 的全部行列式因子为_______.

12. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} -2 & -4 & 12 \\ -2 & 0 & 6 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$, 则其初等因子为_______, Jordan 标准型为_______.

13. 五维复线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 的最小多项式为 $x(x-1)^2$, 值域维数为 4, 则存在 V 的一组基, 使得 $\mathscr{A}$ 在此组基下的矩阵是Jordan 矩阵为:_______.

二. 选择题

1. 下列结论中正确的是( ). (2015年北京交通大学)

(A) 特征矩阵$\lambda E_n - A$的秩一定等于n

(B) 若$A(\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda^2 \end{pmatrix}$, 则$A(\lambda)$ 的不变因子为λ, λ^2

(C)设$A, B \in P^{n\times n}$, 若A与B等价, 则它们有相同的行列式因子组

(D)若两个同阶的$\lambda-$矩阵有相同的秩, 则它们一定等价

2. 设A为n阶方阵, 下列说法中错误的有________个. (2017年北京交通大学)

(1)A与对角矩阵相似的充要条件是A的最小多项式无重根

(2)A与对角矩阵相似的充要条件是A的不变因子都没有重根

(3)A与对角矩阵相似的充要条件是A有n个不同的特征值

(4)A与对角矩阵相似的充要条件是A的初等因子全为一次的

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

3. 设矩阵 A 与矩阵 B 相似, 则有（ ）

A. A 与 B 有相同的特征值;

B. A 与 B 有相同的特征向量;

C. A 与 B 有相同的特征多项式;

D. A 与 B 有相同的行列式.

三.计算题

1. 矩阵A的特征多项式为$f(x)=(x-1)^2(x+3)$. 求A的$Jordan$ 标准型. (2013年北京大学)

2. 在$\mathbb{R}^3$上定义线性变换A, A在自然基$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 下的矩阵为$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
求$\mathbb{R}^3$的一组基, 使得A在这组基下具有$Jordan$ 型. (2016年北京大学)

3. 设$2n$阶方阵$A=\begin{pmatrix} -E & E \\ E & E \end{pmatrix}$, 其中$E$是$n$阶单位矩阵.(2016年北京交通大学)

(1)求A的特征多项式;

(2)求A的极小多项式;

(3)求A的若当标准型.

4. 求矩阵$A(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda+a_1 \end{pmatrix}$的不变因子和行列式因子.(2017年北京交通大学)

5. 设$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -9 & 4 & -6 \\ -9 & 3 & -5 \end{pmatrix}$(2012年北京科技大学)

(1)求A的初等因子;

(2)求出A的$Jordan$标准型.

6. 设$A(\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda^2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \\ (\lambda-1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}$(2014年北京科技大学)

(1)求$A(\lambda)$的不变因子.

(2)求$A(\lambda)$的标准型.

7. 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求矩阵$A$的

(1)不变因子;

(2)初等因子;

(3)若当标准型矩阵I, 并求矩阵T, 使得$T^{-1}AT=I$. (2016 年北京科技大学)

8. A是4阶矩阵且有特征值1, 又A只有一个线性无关的特征向量, 求A的$Jordan$标准型. (2011年大连理工大学)

9. 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & -1 \end{pmatrix}$, 试问矩阵$A$可能有什么样的$Jordan$标准型?试给出该矩阵可对角化的充分必要条件. (2012年湖南大学)

10. 设$A=\begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix}$, 求$A$的$Jordan$标准型$J$. (2015年湖南大学)

11. 设$J_n(c) = \begin{pmatrix} c & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c \end{pmatrix}$, 其中$c \in \mathbb{C}$. 求$J_n(c)$的伴随矩阵$J_n(c)^*$的$Jordan$标准型. (2010年华东师范大学)

12. 求矩阵$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 20 & 3 & -1 & -20 \\ 20 & 3 & 1 & -20 \\ 5 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$的特征值、极小多项式以及$Jordan$标准型. (2011 年华东师范大学)

13. 求矩阵$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 & -4 \\ 6 & 8 & 1 & 8 \\ 14 & 7 & -6 & 0 \\ -6 & -7 & -1 & -7 \end{pmatrix}$的特征多项式、初等因子组、极小多项式以及$Jordan$标准型. (2012 年华东师范大学)

14. 设矩阵$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 求$A^2$的不变因子组、初等因子组、极小多项式以及$Jordan$标准型. (2013年华东师范大学)

15. 设n阶矩阵$A_n = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{pmatrix}$, 其特征多项式记为$f_n(\lambda)$. (2014年华东师范大学)

(1)证明:$f_n(\lambda) = (\lambda+2)f_{n-1}(\lambda) - f_{n-2}(\lambda)$;

(2)求$f_1(\lambda), f_2(\lambda), f_3(\lambda)$, 并求相应的特征值及特征向量;

(3)试写出A_3 的$Jordan$标准型.

16. 已知5阶复方阵A的特征多项式为$f_A(\lambda)$及极小多项式$m_A(\lambda)$分别为$f_A(\lambda) = (\lambda-1)^3(\lambda+2)^2$, $m_A(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$, 求$A$的$Jordan$标准型. (2018年华东师范大学)

17. 记$V_n(n \geq 0)$为次数不大于n的关于x, y的实系数二元多项式生成的空间. 求V_2上线性变换

$$m_{\mathscr{A}} = 2\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$$

的$Jordan$标准型, 并推广到一般情形. (2019年华东师范大学)

18. 求矩阵$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$的$Jordan$标准型. (2012年华南理工大学)

19. 已知矩阵$\lambda E - A$与

$$\begin{pmatrix} -\lambda - 4 & & \\ & \lambda - 2 & \\ & & \lambda - 4 \end{pmatrix}$$

求A的特征多项式、极小多项式、初等因子以及不变因子. (2010年同济大学)

20. 若4阶复矩阵 A 的极小多项式为 $\lambda^2(\lambda-1)$. 求 A 的所有可能的若尔当标准形. (2015年华中科技大学)

21. (1) 求3阶矩阵

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

的若尔当标准形.

(2) 就参数 λ 的不同取值, 讨论方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1 \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$$

解的情形, 并且在有解的情况之下写出它的通解.

(2016年华中科技大学)

22. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, 试求 A 的Jordan 标准型和有理标准型.

23. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. 求 C 的行列式因子, 不变因子和初等因子.

2. 指出 A 与 B, B 与 C 是否相似, 并说明理由.

24. 设 $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 有3 个线性无关的特征向量且 $\lambda = 2$ 是 A 的二重特征值.

1. 求 x, y 的值.

2. 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

25. 求 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&2&0\\3&4&-1\end{pmatrix}$ 的所有不变因子, 初等因子及若尔当 (Jordan) 标准形.

26. (16 分) 设矩阵$A=\begin{pmatrix}3&0&0\\-1&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$, 求$A$ 的若尔当标准形和A 的有理标准形.

27. 设 $A=\begin{pmatrix}2&4&2\\1&3&0\\1&2&1\end{pmatrix}$, 请把 A 分解为一个可逆矩阵 B 和一个幂等矩阵 C (即 $C^2=C$)的乘积.

28. (25 分) 求矩阵$A=\begin{pmatrix}-1&-2&6\\-1&0&3\\-1&-1&4\end{pmatrix}$ 的若尔当标准形J, 并求矩阵P 使得$P^{-1}AP=J$.

29. (25 分) 设A 是一个n 阶方阵, $\operatorname{tr}(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$ 称为矩阵A 的迹.

(1) 若 $f(x)=\left(x^2-2x+2\right)^2(x-1)$ 是6阶方阵 A 的最小多项式, 且 $\operatorname{tr}(A)=6$, 求 A 的若尔当标准形;

(2) 若 B,C 均为对称半正定实矩阵, 并且 $\operatorname{tr}(BC)=0$, 证明: 对任意的正整数 $m,(B+C)^m=B^m+C^m$.

30. 设 A 为秩为1的 n 阶复方阵, A 的迹 $\operatorname{tr}(A)=a\neq 0$, 试求出 A 的所有特征值(写出重数).

31. 已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&x&-4\\1&-5&5\end{pmatrix}$$

与矩阵 j $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&y&0\\0&0&10\end{pmatrix}$ 相似.

(1) 求 x,y .

(2) 求可逆矩阵 T 使 $T^{-1}AT=B$.

32. (20 分) 设矩阵$A=\begin{pmatrix}-1&-2&6\\-1&0&3\\-1&-1&4\end{pmatrix}$, 求$A$ 的若尔当标准形J 及可逆矩阵T, 使得$A=TJT^{-1}$.

33. 已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{pmatrix}$$

求 A 的特征值与若尔当标准形.

34. 设

$$A=\begin{pmatrix}2&a&b\\a&2&1\\b&1&2\end{pmatrix}$$

与

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

相似, (a,b 为复数), 求 A 的特征向量.

35. A 为复数域上 n 阶方阵, 且 $A^k=0,\quad A^{k-1}\neq 0,$ 秩 $\left(A^i\right)=a_i(i=1,2,\cdots,k-1),$ 试给出 A 的Jordan 标准形.

36. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&5&5\\0&4&3\\0&a&2\end{pmatrix}$ 有一个二重特征值.

(1) 试求 A 的最小多项式与Jordan 标准形;

(2) 确定 A 相似于对角矩阵的充分必要条件.

37. 求方阵

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&-5&10&-10&5\end{pmatrix}$$

的若尔当标准型.

38. 设6阶实矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a&-b&&&&\\b&a&1&&&\\&&a&-b&&\\&&b&a&1&\\&&&&a&-b\\&&&&b&a\end{pmatrix},$$

其中$b\neq 0$，试求A的不变因子和初等因子，并写出A的Jordan标准型. (2011年武汉大学)

39. 设复矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\a&2&0\\b&1&-1\end{pmatrix},$$

求A的行列式因子，不变因子，初等因子，最小多项式，Jordan标准形及A相似于对角矩阵的充要条件. (2011年湘潭大学)

40. 设矩阵的特征多项式及最小多项式分别为

$$f(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-1)(\lambda-2),$$

$$m(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2).$$

分别求出A的行列式因子，不变因子，初等因子及Jordan标准型. (2012年湘潭大学)

41. 求$\lambda-$ 矩阵$\begin{pmatrix} \lambda-1 & \lambda & \lambda^2-1 \\ 3\lambda-1 & \lambda^2+2\lambda & 3\lambda^2-1 \\ \lambda+1 & \lambda^2 & \lambda^2+1 \end{pmatrix}$ 的Smith标准型. (2010年中科大)

42. 求$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda^4 \end{pmatrix}$ 的初等因子组. (2011年中科大)

43. 已知复方阵A的特征方阵$\lambda I - A$ 的初等因子组为

$$\{\lambda, \lambda+1, \lambda^2, \lambda^2, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^3\},$$

求A的最小多项式以及$r(A), tr(A)$.(2012年中科大)

四.证明题

1. 证明: $\lambda-$矩阵$A(\lambda)$可逆的充要条件是其行列式$|A(\lambda)|$是一个非零常数. (2010年北京交通大学)

2. 证明: n阶方阵A为数量矩阵, 当且仅当$\lambda E - A$的$n-1$阶行列式因子的次数为$n-1$. (2013年北京交通大学)

3. (1) 设 A 和 B 均为 n 阶复方阵, 证明: A 与 B 相似当且仅当作为 λ -矩阵, ，有 $\lambda E - A$ 等价于 $\lambda E - B$.
(2) 设 A, B 都是3 阶幂零矩阵, 证明: A 相似于 B 当且.仅当 A 与 B 有相同的极小多项式. (3) 试说明上述结论(2) 对4 阶幂零矩阵是否成立, 为什么？(2010年华中科技大学)

4. 设 n 为正整数, $1 \leqslant k, l \leqslant n$.

$$a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_{k+1}, \cdots, a_n$$

是不全为0 的复数,

$$b_1, b_2, \cdots, b_{l-1}, b_{l+1}, \cdots, b_n$$

也是 $n-1$ 个不全零的复数. 设 E 为 n 阶单位矩阵. 把 E 的第 k 行用行向量 $(a_1, \cdots, a_{k-1}, 1, a_{k+1}, \cdots, a_n)$ 代替得矩阵 A; 把 E 的第 l 列用列向量 $(b_1, \cdots, b_{l-1}, 1, b_{l+1}, \cdots, b_n)^T$ 来代替得矩阵 B .
(1) 求 A, B 的若当标准形.
(2) 证明: 作为复矩阵 A 与 B 是相似的.

5. 利用若尔当标准形定理证明: 对任意的 n 阶复方阵 A 一定存在一个正整数 r 满足

$$\operatorname{rank}\left(A^{r}\right)=\operatorname{rank}\left(A^{r+1}\right)$$

并求这样的最小正整数 r . (2017年华中科技大学)

6. 设 A 为任意复方阵。证明: 存在与对角矩阵相似的方阵 S 以及幂零方阵 N 使得 $A=S+N$ 并且 $SN=NS$.

7. 已知 A,B 是两个 n 级有理数矩阵(即矩阵的元素都是有理数). 假设存在 n 级复数矩阵 C 使得 $C^{-1}AC=B$, 求证存在 n 级有理数矩阵 D 使得 $D^{-1}AD=B$.

8. (20 分) 设A 为n 级可逆复矩阵. 求证存在B 使得$A=B^3$.

9. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 是 n 级方阵 A 的 n 个特征值, $\mu_k=\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\lambda_i$, $k=1,2,\cdots,n$. 证明: $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是 A 的伴随矩阵 A^* 的 n 个特征值.

10. 设 A,B 为 n 级矩阵满足 $A^2+A=2E,B^2=B$ 且 $AB=BA$, 证明: 存在可矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ$ 和 $Q^{-1}BQ$ 都是对角矩阵.

11. 设 A,B 为复数域上的 n 级矩阵, 且 A 和 B 无公共特征根, 证明: 关于 X 的矩阵方程 $AX=XB$ 只有零解.

12. 证明: 任一 n 级方阵和它的转置矩阵相似.

13. 设 A 是 n 级实矩阵满足 $A^2=2A+3E_n$. 证明:

    (1) A 相似于一个对角矩阵;

    (2) $A+2E_n$ 是可逆矩阵.

14. 设 λ 为 n 级实矩阵 $A=(a_{ij})$ 的一个实特征值. 证明: 存在正整数 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 使得

$$|\lambda-a_{kk}|\leqslant\sum_{j\neq k}|a_{kj}|\,.$$

15. 设 A 是复数域上的 n 阶方阵, $A^n=0$, 且 $A^{n-1}\neq 0$.

    (1) 若 λ 是 A 的一个特征值, 其对应的特征子空间 $V_\lambda=\{\alpha|A\alpha=\lambda\alpha,\alpha\text{ 是复向量}\}$, 证明: V_λ 的维数是1;

    (2) 是否存在一个复矩阵 B ，使得 $B^2=A$? 请说明理由.

16. 设 A,B 为 n 阶复方阵, $C=AB-BA$, 若 $AC=CA$, 则 C 为幂零矩阵.

17. 设 A, B 为 n 阶复方阵, 证明: $AB+A$ 与 $BA+A$ 有相同的特征值, 且每个特征值的重数相同.

18. (10 分) 数域P 上一个n 阶方阵A 称为幂零的, 如果存在自然数m 使得$A^m=0$. 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为一个幂零方阵, 且 $a_{12}\neq 0, a_{13}=0, a_{22}=0, a_{23}\neq 0$. 证明: 不存在矩阵 B 使得 $B^{n-1}=A$.

19. 证明对任意的2 级复方阵 A, B, C 都有

$$A(BC-CB)^2-(BC-CB)^2A=0.$$

20. (10 分) 设n 级矩阵$A=(a_{ij})_{nn}$ 是一个幂零矩阵, 且$a_{12}\neq 0, a_{13}=1, a_{22}=0, a_{23}\neq 0$, 证明不存在矩阵$B$ 使得 $B^{n-1}=A$.

21. (15 分) 已知A, B 都是n 阶复矩阵, 若 $\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} A_1 & B \\ O & A_2 \end{pmatrix}$ 相似, 证明: 存在矩阵X, 使得 $AX-XA=B$.

22. (10 分) 设A, B 为n 阶复方阵, 且$AB-BA=A$.
(1) 求证 $\operatorname{tr}(A)=0$.
(2) 如果 $n=2$, 求证 $A^2=0$.

23. 设 A, B 分别为 $3\times 2, 2\times 3$ 实矩阵, 且

$$AB=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

求证: BA 与矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 在复数域上相似, 进一步问 BA 与矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 在实数域上相似吗?

24. 求证: 任一复矩阵A 均可分解为 $A=B+C$, 其中C 为幂零阵(即有正整数k, 使$C^k=0$), B 相似于对角形, 且 $BC=CB$.

25. 设 A 是各阶顺序主子式均不为零的 n 阶矩阵, 证明: 存在下三角矩阵 B 与上三角矩阵 C, 使 $A=BC$.

26. 求证; 任一复矩阵 A 均可分解为$A=B+C$, 其中C 为幂零阵(即有正整数k, 使$C^k=0$), B 相似于对角形, 且 $BC=CB$.

27. 如果数域$\mathbf{K}$ 上 n 阶矩阵 A 满足 $A^3=A$, 则 $r(A)+r(I+A)+r(I-A)=2n$. 试求出这个矩阵的相似标准形，其中 $r(A)=r, r(I+A)=s$.

28. 令 A, B, X 是复数域上的 n 阶矩阵, 如果矩阵 A, B 有相同的特征矩阵, 则一定存在非零的矩阵 X 使得 $AX=XB$, 且对任意复数域上多项式 $f(x)$ 都有 $f(A)X=Xf(B)$.

29. 设 A 是数域$\mathbf{K}$ 上的 n 阶矩阵，如果存在非负整数 m 使得 $A^m=O$, 则称 A 是幂零矩阵, 并把满足 $A^m=O$ 的最小非负整数 m 称为 A 的幂零指数.

   1. 当 $m=n$ 时, 写出与 A 相似的若尔当标准形.
   2. 如果 n 阶复矩阵 A 满足 $\operatorname{Tr}\left(A^k=O\right) k=1,2,\cdots n$, 则 A 一定是幂零矩阵.
   3. 如果 n 阶复矩阵 A,B,C 满足 $AB=BA=C$, 且 A,C 可交换, 则 C 一定是幂零矩阵.

30. A,B 是 n 阶矩阵, , 且 $AB=BA$, 若 A 有 r 个互不相同的特征值, 则 A,B 至少有 r 个公共且线性无关的特征向量.

31. 证明: n 阶复方阵 A 可对角化的充要条件是: 对任意 n 维列向量 X, 若 $\left(\lambda_0 E-A\right)^2 X=0$, 则必有 $\left(\lambda_0 E-A\right) X=0$. 其中 E 是 n 阶单位矩阵, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$.

32. 设 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 是实数域上所有 n 阶方阵构成的线性空间, $\mathscr{A}$ 是该空间上的线性变换, 且 $\mathscr{A}(M)=M^2, M\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

   1. 求 $\mathscr{A}$ 的特征值, 特征向量和Jordan 标准形.
   2. 证明: $\mathscr{A}$ 能分解为 n^2 个秩为1 的幂等变换 $\mathscr{A}_i$ 的代数和, 且当 $i\neq j$ 时, $\mathscr{A}_i\mathscr{A}_j=O$.

33. 证明: 在复数域内任意 n 阶方阵均可表示成两个对称矩阵的乘积, 且其中必有一个可逆矩阵.

34. 一个复方阵 T 称为是幂零的，说明存在正整数 m, 使得 $T^m=0$, 设 T 为 n 阶复方阵, 证明 T 为幂零阵当且仅当 T 的特征多项式

$$\chi_T(x)=x^n$$

35. 设 n 阶复方阵 A 的所有特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r, m$ 为正整数. 证明 A^m 的所有特征值为

$$\lambda_1^m,\lambda_2^m,\cdots,\lambda_r^m$$

36. 矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

和矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

是否相似, 证之.

37. 设 A 为 n 阶复方阵, $A^2+A+I=0$(I 为n 阶单位方阵), 证明

$$\det(A)\neq 0$$

(林秋林 林鹭 整理)