国内部分重点高校硕士研究生入学考试高等代数试题
(线性映射部分)

一. 填空题

1. 设$\mathscr{A}$是线性空间V的线性变换, 对自然数k, 如果向量ξ满足$\mathscr{A}^{k-1}\xi \neq 0, \mathscr{A}^k\xi = 0$. 则$\xi, \mathscr{A}\xi, \cdots, \mathscr{A}^{k-1}\xi$线性________关. (2009年北京工业大学)

2. 矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 定义了3维向量空间R^3(R是实数域)的一个线性变换$\mathscr{A}: \xi \to A\xi(\xi \in R^3)$. 其值域$\mathscr{A}R^3$的维数是________. (2009年北京工业大学)

3. 记R^5为5维列向量空间, A是5阶实方阵. 若齐次线性方程组$AX = 0$ 解空间的维数是2, 则线性变换$\mathscr{A}: \alpha \to A\alpha(\alpha \in R^5)$像空间$\mathscr{A}(R^5) = \{A\alpha | \alpha \in R^5\}$的维数是________. (2011北京工业大学)

4. 设$dimV = 4$, $\sigma \in L(V)$, σ在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的矩阵为
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
则σ包含ε_1的最小不变子空间$W =$________. (2016年北京交通大学)

5. 设f是数域P上的三维线性空间V上的一个线性函数, $\varepsilon_1, \varepsilon)_2, \varepsilon_3$是$V$ 的一组基, 且
$$f(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) = f(\varepsilon_1 - 2\varepsilon_3) = 0, f(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = 1$$
则$f(x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3) =$________. (2015年大连理工大学)

6. 设线性空间$\mathbb{R}^3$的线性变换$\mathscr{A}$在基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$下的矩阵为$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}^3$的像$\mathscr{A}\alpha$在$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$下的坐标为$(-1, 2, 3)'$, 则$\alpha =$________. (2015年湖南师范大学)

二. 选择题

1. 设A是$m\times n$实矩阵(自然数$m,n>1$). $A^{'}A$定义了n维实数列向量空间R^n到自身的一个线性变换$\mathscr{A}$: $\alpha\to(A^{'}A)\alpha$. 若A的秩$r(A)=k$, 则像空间$W=\{\mathscr{A}(\alpha)|\alpha\in R^n\}$的维数( ). (2012年北京工业大学)

(A)$dimW=k$

(B)$dimW=n-kK$

(C)$dimW=m-k$

(D)$dimW=r(A^{'}A)$

2. 设V,U分别是n维, m维线性空间$(m\neq n)$, $\varphi:V\to U$的线性映射, 则( ). (2014 年北京工业大学)

(A)$dim\,ker\varphi+dim\,Im\varphi=n$

(B)$dim\,ker\varphi+dim\,Im\varphi=m$

(C)$dim\,ker\varphi+dim\,Im\varphi=|m-n|$

(D)$dim\,ker\varphi+dim\,Im\varphi=m+n$

3. 线性变换$\mathscr{A}$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵是$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ 则$\mathscr{A}$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_3,\varepsilon_2$下的矩阵是( ). (2017年北京工业大学)

(A)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

(B)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

(C)$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(D)$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

4. 设φ是V上线性变换, $\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$是$V$上的一组基, 且由每个$\xi_i$生成的子空间$L(\xi_i)$的是$\varphi$的不变子空间, 则$\varphi$在$\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$下的表示矩阵______. (2015年北京交通大学)

(A)必可逆

(B)必为对角阵

(C)必为上三角阵, 但未必是对角矩阵

(D)必为上三角阵, 但未必是对角矩阵

5. 在以下的变换T中, 有______个是线性变换. (2015 年北京交通大学) (1)设$\alpha\neq 0$为线性空间V中某固定向量, $Tx=x+\alpha$(对任意$x\in V$);

(2)在线性空间$P[x]$中, $Tf(x)=f(x+1)$(对任意$f(x)\in P[x]$);

(3)设A,B为n阶固定方阵, $TX=AXB$(对任意$X\in P^{n\times n}$));

(4)设A为n阶固定方阵, $TX=AX-XA$(对任意$X\in P^{n\times n}$)

(A)1

(B)2

(C)3

(D)4

6. 下列所定义的变换, 有______个是线性变换. (2016年北京交通大学)

(1)在P^3中, $\sigma(x_1,x_2,x3)=(x_1^2,x_2+x_3,x_3^2)$;

(2)在P^3中, $\sigma(x_1,x_2,x3)=(2x_1-x_2,x_2+x_3,x_1)$;

(3)在$P[x]$中, $\sigma f(x) = f(x+1)$;

(4)在$P[x]$中, $\sigma f(x) = f(x_0)$, $x_0 \in P$, 是一固定的数.

(A)1 (B)2

(C)3 (D)4

7. 下列所定义的变换, ______不是线性变换. (2017年北京交通大学)

(A)在$\mathbb{R}^2$中, $\sigma(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, x_2 - x_3, 2x_2 + 4x_3)$;

(B)在$\mathbb{R}^2$中, $\sigma(a,b) = \begin{cases} (a,b), & 若ab \geq 0; \\ (a,-b), & 若ab < 0. \end{cases}$

(C)设V是定义在$[a,b]$上所有连续函数组成的$\mathbb{R}$上的线性空间, 在V 中$\sigma(f(x)) = \int_a^x f(t)dx$;

(D)设V是数域F上的1维线性空间, $\sigma(\alpha) = a\alpha$, 其中a是F 中一固定数.

三.计算题

1. 设V是一个n维$K-$线性空间, $(\alpha_j)_{j=1}^n$ 是它的一组基. 若对V上的线性变换$\mathscr{A}$.

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathscr{A}(\alpha_1) \\ \mathscr{A}(\alpha_2) \\ \vdots \\ \mathscr{A}(\alpha_n) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

则记$A = \mathscr{A}_f$. 若对任一个线性变换$\mathscr{B}$, 都有$(\mathscr{A}\mathscr{B})_f = \mathscr{A}_f\mathscr{B}_f$, 试确定$\mathscr{A}$在基底$(\alpha_j)_{j=1}^n$下的矩阵. (2018年北京大学)

2. 设$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$是四维线性空间$V$的一组基, 线性变换$\mathscr{A}$在此基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(1)求$\mathscr{A}^{-1}(0)$的维数与一组基;

(2)求$\mathscr{A}^V$的一组基). (2016年北京工业大学)

3. $V = \{\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i | a_i \in \mathbb{R}\}$, σ为V中线性变换, 对任意的$g(x) \in V$, 有$\sigma(g(x)) = g(x) + g^{'}(x)$.

(1)求σ在基$\{1, x, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}, \cdots, \frac{x^{n-12}}{(n-1)!}\}$ 下的矩阵.

(2)求V中所有σ的不变子空间的个数, 并证明你的结论. (2019年北京工业大学)

4. 设$V = \{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 | a_i \in 数域P\}$, $T \in L(V)$,

$$T: V \to V, T(f(x)) = xf^{'}(x) - f(x)$$

(1)求T的核空间和像空间: $kerT$及ImT;

(2)求证: $V = kerT \oplus ImT$. (2016年北京交通大学)

5. 设线性变换$\mathscr{A}$在三维线性空间V的一组基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$下的矩阵是$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(1)求$\mathscr{A}$在基η_1, η_2, η_3下的矩阵, 其中$\begin{cases} \eta_1 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 \\ \eta_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 \\ \eta_3 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \end{cases}$;

(2)求$\mathscr{A}$的值域$\mathscr{A}(V)$和核$\mathscr{A}^{-1}(0)$;

(3)把$\mathscr{A}^{-1}(0)$的基扩充为V的基, 并求$\mathscr{A}$在这组基下的矩阵. (2013年北京科技大学)

6. 已知

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

和

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}, \eta_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}, \eta_4 = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$$

是$\mathbb{M}_2(P)$的两组基, $\mathscr{A}$是$\mathbb{M}_2(P)$的线性变换, 定义为

$$\mathscr{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \alpha, \alpha \in \mathbb{M}_2(P).$$

(1)求由基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 到基$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$的过渡矩阵;

(2)求一个非零的$\xi \in \mathbb{M}_2(P)$, 使它在$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 和$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$下有相同的坐标;

(3)求$\mathscr{A}$的特征值;

(4)求$\mathscr{A}$的特征子空间. (2014年北京科技大学)

7. 已知σ为对称变换, V是一个线性空间, W是V的一个子空间, 试证: W是σ的不变子空间. (2009年北京师范大学)

8. V_1, V_2为线性空间V的两个子空间, $dimV_1 + dimV_2 = n$, 证明: 存在V的线性变换σ: $Ker\sigma = V_1, Im\sigma = V_2$. (2010年北京师范大学)

9. 设σ是域F上向量空间V的幂等变换, 即σ是满足条件$\sigma^2 = \sigma$的线性变换.

(1)证明: $V = Im(\sigma) \oplus Ker(\sigma)$;

(2)证明: σ可对角化. (2016年北京师范大学)

10. 设$\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C}$是线性空间$V$上的两两不同的线性变换, 求证: 存在$\alpha\in V$, 使得$\mathscr{A}\alpha,\mathscr{B}\alpha,\mathscr{C}\alpha$两两不同. (2009年大连理工大学)

11. 设V是数域P上的n维线性空间, $\mathscr{A}$是V上的线性变换, 且存在$\alpha\in V$, 使得$V=L(\alpha,\mathscr{A}\alpha,\mathscr{A}^2\alpha,\cdots)$, 其中$L(\alpha,\mathscr{A}\alpha,\mathscr{A}^2\alpha,\cdots)$表示$\alpha,\mathscr{A}\alpha,\mathscr{A}^2\alpha,\cdots$生成的$V$的子空间.

    (1)证明$\alpha,\mathscr{A}\alpha,\mathscr{A}^2\alpha,\cdots,\mathscr{A}^{n-1}\alpha$ 是V的一组基底;

    (2)求$\mathscr{A}$在这组基下的矩阵, 及$\mathscr{A}$的特征多项式与最小多项式. (2011年大连理工大学)

12. 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$是线性空间$V$的一组基, 已知线性变换$T$在这组基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{pmatrix}$$

    (1)求T在基$\eta_1=\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_4,\eta_2=3\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4,\eta_3=\varepsilon_3+\varepsilon_4,\eta_4=2\varepsilon_4$下的矩阵$B$;

    (2)求T的值域TV和核$T^{-1}(0)$;

    (3)在$T^{-1}(0)$选一组基, 将它扩充成V的一组基. (2015年湖南大学)

13. 在多项式线性空间$V=P[x]_n$中, 规定线性变换$\mathscr{A}$为

$$\mathscr{A}(f(x))=xf^{'}(x)-f(x),\forall f(x)\in V$$

    试求出$\mathscr{A}$的值域$\mathscr{A}V$以及$\mathscr{A}V$的一个基. (2010年湖南师范大学)

14. 已知线性空间P^3上的线性变换

$$\mathscr{A}(x,y,z)=(x+2y-z,y+z,x+y-2z)$$

    求$\mathscr{A}$的值域$\mathscr{A}P^3$与核$\mathscr{A}^{-1}(0)$的基和维数. (2012年湖南师范大学)

15. 设$\mathscr{T}$为实线性空间$\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 的线性变换, 已知

$$\mathscr{T}(1,0,0)=(1,0,1),\ \mathscr{T}(0,1,0)=(2,1,1),\ \mathscr{T}(0,0,1)=(-1,1,-2).$$

    (1)试用矩阵A表示此变换$\mathscr{T}(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)A$;

    (2)求$\mathscr{T}$的值域$\mathscr{T}(\mathbb{R}^3)$的一个基;

    (3)求$\mathscr{T}$的核$\mathscr{T}^{-1}(0)$的一个基. (2014年湖南师范大学)

16. 设V是数域K上的4维线性空间, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是$V$的一组基. 若$\mathscr{A}$是$V$上的线性变换, 且在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$下的矩阵为准对角矩阵$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}$, 试求所有的$\mathscr{A}-$不变子空间. (2014年华东师范大学)

17. 已知$\mathbb{R}^3$的线性变换$\mathscr{A}$在基$\eta_1=(-1,1,1),\eta_2=(1,0,-1),\eta_1=(0,1,1)$下的矩阵为:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1)求$\mathscr{A}$在基$\varepsilon_1=(1,0,0),\varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_1=(0,0,1)$ 下的矩阵;

(2)求$\mathscr{A}$的值域和核. (2015年华南理工大学)

18. 设$\mathbb{R}^2$的线性变换$\mathscr{A}$在基$\varepsilon_1=(1,2),\varepsilon_2=(2,1)$下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

线性变换$\mathscr{B}$在基$\eta_1=(1,1),\eta_2=(1,2)$下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(1)求$\mathscr{A}+\mathscr{B}$在基η_1,η_2下的矩阵;

(2)求$\mathscr{A}\mathscr{B}$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2$下的矩阵;

(3)设$\alpha=(3,3)$, 求$\mathscr{A}\alpha$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2$下的坐标;

(4)求$\mathscr{B}\alpha$在基η_1,η_2下的坐标. (2016年华南理工大学)

19. $P[x]_4$ 是所有次数小于4的多项式和零多项式构成的线性空间, 求线性变换 $\mathscr{A}(f(x))=x^2f''(x)+f(x)+\ f'(x)$ 的特征值, 求最大特征值的特征向量.

20. 设 σ 是线性空间 $V=P^{n\times n}$ 的一个线性变换, 满足 $\sigma(A)=A'$, 其中 A' 为 A 的转置矩阵, 求 σ 的全部特征值及对应的特征向量. (2015年南京师范大学)

21. 设 V 为数域 P 上的有限维线性空间, $\mathscr{A}$ 为 V 上的线性变换, 且 $\mathscr{A}$ 满足

$$\mathscr{A}^4+\mathscr{A}^3-3\mathscr{A}^2-\mathscr{A}+2\mathscr{E}=\mathscr{O}$$

其中 $\mathscr{E}$ 为恒等变换, 若存在一个非零向量 $\alpha\in V$ 使得 $\mathscr{A}^3(\alpha)+\mathscr{A}^2(\alpha)-\mathscr{A}(\alpha)=3\alpha$, 试问是否存在 V 的一组基, 使得 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩陈为对角阵? 说明理由. (2007年南开大学)

22. 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

在 $P^{4\times 1}$ 上定义线性变换 $\mathscr{A}$ 使 $\mathscr{A}X=AX, X\in P^{4\times 1}$, 试求 $\mathscr{A}$ 的像 $\operatorname{Im}\sigma$ 与 $\ker\sigma$ 的维数与一组基. (2009年南开大学)

23. 设 A 为数域 P 上的 n 级方阵, 且有 n 个互异的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 定义 $P^{n\times n}$ 上的线性变换 T 为 $T(X)=AX, X\in P^{n\times 1}$, 试求出 T 的所有特征值及其重数. (2012年南开大学)

24. (20 分) 3 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}$$

定义 $P^{3\times 3}\to P^{3\times 3}$ 的线性变换 $\sigma:\sigma(X)=AX$, 其中 $X\in P^{3\times 3}$. 分别求 $\ker\sigma$ 与 $\operatorname{Im}\sigma$ 的维数与一组基.

25. 设$M_2(\mathbb{R})$表示实数域上全体二阶方阵构成的线性空间，矩阵

$$\eta_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\eta_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},$$

是$M_2(\mathbb{R})$ 的一个基，又设

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1&0\\3&0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}3&1\\7&3\end{pmatrix},\eta_4=\begin{pmatrix}3&3\\7&7\end{pmatrix}.$$

已知σ 是$M_2(\mathbb{R})$ 的一个线性变换，$\sigma(\eta_i)=\xi_i(i=1,2,3,4)$.

（1）求$\sigma(\xi_1),\sigma(\xi_2),\sigma(\xi_3),\sigma(\xi_4)$;

（2）问$\sigma(\xi_1),\sigma(\xi_2),\sigma(\xi_3),\sigma(\xi_4)$ 能否构成$M_2(\mathbb{R})$ 的一个基？请阐述理由. (2010年武汉大学)

26. 设f 是平面$\mathbb{R}^2$ 上的线性变换，使得

（1）点$(1,0)$ 的像位于第四象限;

（1）点$(0,1)$ 的像位于第二象限;

（1）点$(1,1)$ 的像位于第一象限.

证明：f 是可逆变换，且f^{-1} 把第一象限内的任意点都映射到第一象限. (2010年武汉大学)

27. 设φ 是复数域上的线性变换，ε 为恒等变换，λ_0 为φ 的一个特征值，λ_0 在φ 的最小多项式中的重数$m_0=\min\limits_{k}\{k\in N^+|ker(\lambda_0-\varphi)^k=ker(\lambda_0\varepsilon-\varphi)^{k+1}\}$.(2014年武汉大学)

28. 设$\varepsilon_1=(1,0),\varepsilon_2=(0,1)$ 是实线性空间$\mathbb{R}^2$ 中的单位向量，$\alpha_1=(1,3),\alpha_2=(2,2)$, $\mathcal{A}$ 是$\mathbb{R}^2$ 的线性变换，使得

$$\mathcal{A}(\varepsilon_1)=\alpha_1,\mathcal{A}(\varepsilon_2)=\alpha_2.$$

（1）求$\mathcal{A}$ 在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 下的矩阵.

（2）求$\mathcal{A}$ 的逆变换$\mathcal{A}^{-1}$ 在基α_1,α_2 下的矩阵.

（3）求$\mathcal{A}$ 的特征值与特征向量.

（4）求$\mathcal{A}$ 的值域与核. (2010年湘潭大学)

29. 设$\mathbb{R}^3$ 中线性变换$\mathcal{A}$ 在基$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, 下的矩阵$A=\begin{pmatrix}-1&2&0\\1&1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}$ ，求$\mathcal{A}$ 在基$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, 下的矩阵. (2010年云南大学)

30. 设微商$\mathcal{D}(f(x))=f'(x)$ 是线性空间$P[x]_3$ 的一个线性变换（其中$f(x\in P[x]_3)$），求$\mathcal{D}$ 在基$1,x,x^2$ 下的矩阵. (2011年云南大学)

31. 设$\mathcal{A}$ 是n维线性空间V的线性变换，求$\mathcal{A}$ 的秩+$\mathcal{A}$ 的零度. (2011年云南大学)

32. 令T是有限维线性空间V上的线性变换，设W是V的$T-$ 不变子空间.那么，$T|_W$ 的最小多项式整除T的最小多项式. (2012年浙江大学)

33. 空间V上的线性变换f ，可以找到子空间U,W ，使得f 在U上为可逆线性变换，在W上为幂零线性变换，且$V=U\oplus W$.(2015年浙江大学)

34. 所有正交变换构成G

   （1）G关于线性变换的合成和逆变换封闭;

   （2）G为有限集还是无限集;

   （3）G是什么代数结构. (2015年浙江大学)

35. 设V_1,V_2 是n维线性空间V的两个子空间，且它们的维数之和等于n.证明：存在V上的线性变换$\mathbb{T}$ ，使得$\mathbb{T}$ 的核和像分别等于V_1,V_2 .(2016年浙江大学)

36. 设$\mathbb{R}^{n\times n}$ 上的线性变换$\mathcal{A}X=AXA^T$ ，其中A是n阶实方阵，$rank(A)=r$ ，求$Im\mathcal{A}$ 的维数及其一组基. (2014年中科大)

37. 设P_3 是由次数不超过3的复系数多项式组成的线性空间.考虑其上的线性变换

$$\mathcal{A}=x\frac{d}{dx}:P_3\to P_3.$$

   试求$\mathcal{A}$ 的极小多项式. (2015年中科大)

四.证明题

1. 同构空间的维数:

   设域F上线性空间W,U,V他们分别是r,s,t维的. σ为W到U 上的线性映射, f属于$Hom(W,U)$证明:

   (1)$dimHom(W,U)=rs$;

   (2)设σ^*为$Hom(W,U)$到$Hom(W,V)$上线性映射, 则存在单射σ, 使$\sigma^*(f)\omega=\sigma(f\omega)$, 其中$\omega\in W$;

   (3)$dimIm\sigma^*=ker(i-\sigma^*)+Im\sigma$. (2011年北京大学)

2. 设V是n维线性空间, $\mathscr{A}$为一线性变换且$\mathscr{A}$ 的最小多项式次数为n.

(1)证明存在向量α使得$\alpha, \mathscr{A}\alpha, \cdots, \mathscr{A}^{n-1}\alpha$是$V$的一组基;

(2)任意与$\mathscr{A}$可交换的线性变换可表为$\mathscr{A}$的多项式. (2014年北京大学)

3. 设V是有限维线性空间, A, B是V上线性变换满足下面条件:

(1)$AB = O$, 这里O是0变换;

(2)A的任意不变子空间也是B的不变子空间;

(3)$A^5 + A^4 + A^3 + A^2 + A = O$, 证明: $BA = O$. (2016年北京大学)

4. 设V是复数域上有限维线性空间, A是V上的线性变换, A在一组基下矩阵为F.

(1)若A可对角化, 则对任意A的不变子空间U, 存在U的一个补空间W 是A 的不变子空间.

(2)若对任意A的不变子空间U, 存在U的一个补空间W是A的不变子空间, 证明F可对角化. (2016年北京大学)

5. $\mathbb{F}$为数域, V是$\mathbb{F}$上n维线性空间. A是V 上线性变换. 证明存在唯一可对角化线性变换A_1, 幂零线性变换A_2使得$A = A_1 + A_2, A_1A_2 = A_2A_1$. (2017年北京大学)

6. 设A是2阶实矩阵, 若存在正整数k, 使得$A^k = 0$, 则称A是幂零矩阵; V是全体2阶实矩阵组成的$R-$线性空间, E_{ij}表示$(i, j)(i, j = 1, 2)$位置元素为1, 其余位置上为0的2阶矩阵. 定义映射$\mathscr{A}$:

$$\mathscr{A}(X) = AX - XA, X \in V$$

(1)证明: $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$是$V$的一组基, $\mathscr{A}$是线性空间V上的线性变换;

(2)若$A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求$\mathscr{A}$在基$\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ 下的矩阵;

(3)对于任意2阶矩阵A, 求$\mathscr{A}$在基$\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$下的矩阵;

(4)若A是幂零矩阵, 证明$\mathscr{A}$在基$\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ 下的矩阵也是幂零的. (2013 年北京工业大学)

7. 设V是数域P上的n维线性空间, $\mathscr{A}$是V上的线性变换, $\mathscr{A}(\alpha_1) = 2\alpha_1$, I为V上的恒等变换, 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$满足$(\mathscr{A} - 2I)\alpha_{i+1} = \alpha_i(1, 2, \cdots, n-1)$.

(1)证明: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$为$V$的一组基;

(2)求$\mathscr{A}$在$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$下的矩阵. (2014年北京工业大学)

8. 设V是实数域R上的n维线性空间, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是$V$的一组基, 于是由

$$\mathscr{A}(\alpha_i) = \alpha_{i+1}(i = 1, 2, \cdots, n), \mathscr{A}(\alpha_n) = 0$$

定义了V的一个线性变换$\mathscr{A}$. 回答下列问题:

(1)试求$\mathscr{A}$在$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$下的矩阵;

(2)证明: $\mathscr{A}^n = 0$, $\mathscr{A}^{n-1} \neq 0$;

(3)若V有一个线性变换$\mathscr{B}$满足$\mathscr{B}^n = 0$, $\mathscr{B}^{n-1} \neq 0$, 则存在V的一组基, 使得$\mathscr{B}$在这组基下的矩阵与(1)中得到的矩阵相同;

(4)$\mathbb{R}$上的n阶方阵M, N满足$M^n = N^n = 0$, $M^{n-1} \neq 0$, $N^{n-1} \neq 0$, 证明M与N相似. (2015 年北京工业大学)

9. 设σ是数域P上n维线性空间V上的线性变换. 证明:

(1)存在正整数k, 使得对所有的$l > k$都有$ker(\sigma^l) = ker(\sigma^k)$;

(2)$r(\sigma) = r(\sigma^2)$的充要条件是$V = \sigma(V) \oplus ker\sigma$. (2018年北京工业大学)

10. 在线性空间V中, 有线性变换σ, τ, υ. 且$\upsilon\tau - \tau\upsilon = \sigma$. 证明:

(1)$\upsilon\tau^k - \tau^k\upsilon = k\tau^{k-1}\sigma$.

(2)存在正整数m, 使得$\sigma^m = 0$. (2019年北京工业大学)

11. 设T是n维线性空间V的线性变换, 证明: T的秩+T的零度= n. (2010年北京交通大学)

12. 设T是实向量空间V上的线性变换, 且满足$T^2 = I$, 这里I表示V上的恒等变换. 定义两个子空间如下:

$$V_1 = \{v \in V : T(v) = v\}; V_2 = \{v \in V : T(v) = -v\},$$

证明: $V = V_1 \oplus V_2$, 这里$\oplus$表示直和. (2014年北京交通大学)

13. 设线性变换σ与τ满足$\sigma^2 = \sigma$, $\tau^2 = \tau$, 证明: σ与τ有相同的核的充分必要条件是$\sigma\tau = \sigma, \tau\sigma = \tau$. (2016年北京交通大学)

14. 设$\mathscr{A}$是n维线性空间上的线性变换, 求证:

$$dimIm\mathscr{A}^2 = dimIm\mathscr{A}$$

的充要条件是$V = V_1 \oplus V_2$. (2009年北京科技大学)

15. 设线性空间V的线性变换$\mathscr{A}$满足$\mathscr{A}^2 = \mathscr{A}$, 称之为幂等变换, 证明:

(1)V中向量β属于$\mathscr{A}$的象集$Im\mathscr{A}$当且仅当$\mathscr{A}(\beta) = \beta$.

(2)$V = Im\mathscr{A} \oplus \mathscr{A}$且$V$的任一向量的直和分解为$\alpha = \mathscr{A}(\alpha) + (\alpha - \mathscr{A}(\alpha))$.

(3)对任一直和分解$V = V_1 \oplus V_0$, 存在唯一的幂等变换$\mathscr{A}$, 使得$V_1 = Im\mathscr{A}$, $V_0 = ker\mathscr{A}$.

(4)每个幂等变换都有方阵表示$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. (2010年北京科技大学)

16. 设线性空间$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s$. 证明: 存在$V$的线性变换$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_s$. 使得

(1)$\mathscr{A}_i^2 = \mathscr{A}_i, 1 \leq i \leq s$;

(2)$\mathscr{A}_i\mathscr{A}_j = 0, i \neq j$;

(3)$\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 + \cdots + \mathscr{A}_s = I$ 为恒等变换;

(4)$Im\mathscr{A}_i = W_i, 1 \leq i \leq s$. (2011年北京科技大学)

17. 设$\mathscr{A}$是线性空间V上的线性变换, 而$\xi \in V$, 设$\xi, \mathscr{A}(\xi), \cdots, \mathscr{A}^{k-1}(\xi)$都不等于零, 但$\mathscr{A}^k(\xi)=0$. 证明: $\xi, \mathscr{A}(\xi), \cdots, \mathscr{A}^{k-1}(\xi)$线性无关. (2012 年北京科技大学)

18. 设3维线性空间V上线性变换$\mathscr{A}$在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$下的矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{pmatrix}$, 记$L(V)$为$V$上线性变换全体, $C(\mathscr{A})=\{\mathscr{B} | \mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}, \mathscr{B} \in L(V)\}$.

(1)证明: $C(\mathscr{A})$是$L(V)$的子空间;

(2)求$C(\mathscr{A})$的一组基和维数. (2015年大连理工大学)

19. 设$\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$分别是n维线性空间V上的线性变换, 且$\mathscr{A}+\mathscr{B}=Id_V$, 且$r(\mathscr{A})+r(\mathscr{B})=n$, 证明:

(1)$V=\mathscr{A}(V) \oplus \mathscr{B}(V)$;

(2)$\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}=0$; $\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$, $\mathscr{B}^2=\mathscr{B}$. (2015 年大连理工大学)

20. 设σ是n维向量空间V上的一个线性幂等变换, 即$\sigma^2=\sigma$, 试证:

(1)σ的特征值只能是0和1;

(2)$\sigma+\varepsilon$为V上可逆线性变换, 其中ε是V上的单位变换. (2009年湖南大学)

21. 设V是数域P上的n维线性空间, $\mathscr{A}$是V的线性变换, 如果存在V中的一组基, 使得$\mathscr{A}$在这组基下的矩阵为若当块矩阵

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{pmatrix}$$

证明: (1)存在向量$\varepsilon \in V$, 使得$\mathscr{A}^{n-1}\varepsilon \neq 0$, 但$\mathscr{A}^n\varepsilon=0$;

(2)V中包含向量ε的$\mathscr{A}-$子空间(即$mathscrA$的不变子空间)只有线性空间V自身;

(3)V中的任一非零$\mathscr{A}-$子空间都包含$\mathscr{A}^{n-1}\varepsilon$;

(4)V不能分解为两个非平凡$\mathscr{A}-$子空间的直和. (2013 年湖南大学)

22. 设$\mathscr{A}$是n维线性空间V的线性变换, 请给出简略说明一定存在正整数m, 使得:

$$\mathscr{A}^{2m}V=\mathscr{A}^mV$$

(2010年湖南师范大学)

23. 设$\mathscr{T}$是n维线性空间V的线性变换且$\mathscr{T}^{n-1} \neq 0, \mathscr{T}^n=0$, 证明: 存在$V$的基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 使得$\mathscr{T}$在这组基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}O & O \\ E_{n-1} & O\end{pmatrix}. \text{ (2010年湖南师范大学)}$$

24. 设V是数域P上的n维线性空间, $\mathscr{A}$是V上的线性变换, 且$\mathscr{A}^{n-1}\neq 0$, $\mathscr{A}^n=0$, 证明: (1)存在V的一个向量α使得$\alpha,\mathscr{A}\alpha,\mathscr{A}^2\alpha,\cdots,\mathscr{A}^{n-1}\alpha$ 是V的一组基;

(2)对于整数$1\leq k\leq n$, 有$dim\mathscr{A}^kV=n-k$. (2014年湖南师范大学大学)

25. 设$\mathscr{A},\mathscr{B}$是线性空间V的两个线性变换, 且$\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$.

(1)证明: $\mathscr{A}^{-1}(0)=\{\alpha-\mathscr{A}\alpha|\alpha\in V\}$;

(2)$\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{A}\mathscr{B}$当且仅当$\mathscr{A}(V)$, $\mathscr{A}^{-1}(0)$都是$\mathscr{B}$的不变子空间. (2014年湖南师范大学)

26. 设$\mathscr{A}$是n维线性空间的线性变换, 则下列条件等价;

(1)$\mathscr{A}^2=\mathscr{T}$(恒等变换);

(2)$\mathscr{A}$的特征值为±1, 且$V=V_1\oplus V_{-1}$, 其中V_1, V_{-1}分别特征值$1,-1$的特征子空间;

(3)V中有一组基, 使$\mathscr{A}$在该基下的矩阵为$\Lambda=\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & -I_{n-r}\end{pmatrix}$. (2015 年湖南师范大学)

27. 设V是n维线性空间, $\mathscr{A}$是V上线性变换, 证明下列条件等价:

(1)存在正整数m, 使得:

$$\mathscr{A}^{2m}(V)=\mathscr{A}^m(V),(\mathscr{A}^{2m})^{-1}(0)=(\mathscr{A}^m)^{-1}(0);$$

(2)$V=\mathscr{A}^m(V)\oplus\mathscr{A}^m)^{-1}(0)$(2016 年湖南师范大学)

28. 设V是数域K上的线性空间, X是一个集合. 已知存在一双射$\varphi:X\to V$. 先在X上定义加法和数乘运算如下:

$$x\oplus y=\varphi^{-1}(\varphi(x)+\varphi(y)),x,y\in X,$$
$$x\circ y=\varphi^{-1}(\lambda\varphi(x)),\lambda\in K,x\in X.$$

验证X关于上述定义的加法与数乘构成K上的一个线性空间, 并且φ是线性空间之间的一个同构. (2016年华东师范大学)

29. 设φ是n维线性空间V上的线性变换, α是V中的向量. 已知整数m满足$\varphi^m(\alpha)\neq 0$, 但$\varphi^{n+1}(\alpha)=0$. 求证: $\alpha,\varphi(\alpha),\cdots,\varphi^m(\alpha)$线性无关. (2016年华东师范大学)

30. 设$f:U\to V$, $g:V\to W$是数域K上有限维的线性映射, 证明:

$$dim(Kerf)+dim(Imf\cap Kerg)=dim(Ker(gf)).\ (2017年华东师范大学)$$

31. 设f与g是从有限维线性空间U到有限维线性空间W的两个线性映射. 若$Imf=Img$, 这里Imf是是f的像, 证明: 存在U上的可逆线性变换h, 使得$g=f\circ h$. (2018 年华东师范大学)

32. 设K是一个数域, m,n为自然数, $M_{m,n}(K),M_m(K)$ 分别是数域K上$m\times n$阶与m阶矩阵生成的空间, A是秩为n的$m\times n$阶矩阵. 定义

$$f: M_m(K) \to M_{m,n}(K), f(X) = XA.$$

(1)证明: f是一个线性映射;

(2)设$m = n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, 分别求$f$的核$kerf$的一组基与$f$的像$Imf$的一组基;

(3)对于任意的m, n, r,求f的秩;

(4)对于任意的m, n, r,求f的核$kerf$的维数. (2018年华东师范大学)

33. 设$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$是数域$K$上的$n$个两两不同的数, V是K上的线性空间, φ是V上的线性变换, 且它在基$\xi_1, \cdots, \xi_n$下的矩阵为对角矩阵$A = diag\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$.

(1)设W是φ的不变子空间, $x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n \in W$, 其中$x_1, \cdots, x_n \in K$, 证明: 若某个$x_i$不为0, 则$\xi_i \in W$;

(2)求φ的不变子空间个数. (2018年华东师范大学)

34. 已知$\mathscr{A}: V \to V$是有限维复线性空间V上的线性变换. 设$v \in V$, 存在$f(\lambda) \in C[\lambda]$ 使得$f(\mathscr{A})(v) = 0$, 则称$f(\lambda)$为对v的零化多项式.

(1)证明: $\mathscr{A}$对v的非零零化多项式存在;

(2)$\mathscr{A}$对v的次数最低的首项系数为1的零化多项式称为极小多项式, 记为$m_{\mathscr{A},v}(\lambda)$. 证明:零化多项式均能被$m_{\mathscr{A},v}(\lambda)$整除;

(3)记$\mathscr{A}$的极小多项式为$m_{\mathscr{A}}(\lambda)$, 证明: 存在$v \in V$使得$m_{\mathscr{A},v}(\lambda) = m_{\mathscr{A}}(\lambda)$. (2019 年华东师范大学)

35. 设$\mathscr{A}$是数域P上的n维线性空间V的线性变换, $f(x), g(x) \in P[x]$. 证明: (1)$f(\mathscr{A})^{-1}(0) + g(\mathscr{A})^{-1}(0) \subseteq (f(\mathscr{A})g(\mathscr{A}))^{-1}(0)$.

(2)当$f(x)$与$g(x)$互素时, 有$f(\mathscr{A})^{-1}(0) \oplus g(\mathscr{A})^{-1}(0) = (f(\mathscr{A})g(\mathscr{A}))^{-1}(0)$. (2009年华南理工大学)

36. 设$\mathscr{A}$是数域$\mathbb{R}$上的n维线性空间V上的线性变换, $\mathscr{A}^2 = \varepsilon$(恒等变换). 令$V^+ = \{x \in V | \mathscr{A}x = x\}$, $V^- = \{x \in V | \mathscr{A}x = -x\}$. 证明: $V = V^+ \oplus V^-$. (2010 年华南理工大学)

37. 设$\mathscr{A}$是n维线性空间V的一个线性变换, W是V的子空间, $\mathscr{A}W$表示W中向量的像组成的子空间, 证明: $dim(\mathscr{A}W) \geq r(\mathscr{A}) + dimW - n$. (2011年华南理工大学)

38. 设$\mathscr{A}$是n维线性空间V的一个线性变换, 证明:

$$dim(\mathscr{A}^{-1}(0)) + dim(\mathscr{A}V) = n,$$

这里符号$\mathscr{A}^{-1}(0)$表示$\mathscr{A}$的核, $\mathscr{A}V$表示$\mathscr{A}$的值域. (2012年华南理工大学)

39. 设W是数域P上n维线性空间V的子空间, $\mathscr{A}$是V的一个线性变换, $\mathscr{A}W$表示W中向量的像组成的子空间. 令$W_0 = W \cap \mathscr{A}^{-1}(0)$, 证明: $dim(W) = dim(\mathscr{A}W) + dim(W_0)$. (2013年华南理工大学)

40. 用$\mathbb{C}[x]$表示复数域上$\mathbb{C}$次数小于n的多项式以及零多项式组成的线性空间. 今有$\mathbb{C}[x]$到$\mathbb{C}^n$ 的映射

$$\mathscr{A}: f(x) \mapsto (f(0), f(1), f(2), \cdots, f(n-1)).$$

证明: $\mathscr{A}$为线性空间$\mathbb{C}[x]$到线性空间$\mathbb{C}^n$的同构映射. (2014年华南理工大学)

41. 设$\mathscr{A}$为数域P上的线性空间V的线性变换, $f(x) \in P[x]$使得$f(\mathscr{A}) = f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)$且$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x)$两两互素. 令$V_i = (f_i(\mathscr{A}))^{-1}(0), i = 1, 2, \cdots, s$. 证明: $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots V_s$. (2019年华南理工大学)

42. 已知 X 为线性变换 $\mathscr{A}$ 关于特征值 λ 的特征向量, Y 为线性变换 $\mathscr{A}'$ 关于特征值 μ 的特征向量, $\lambda \neq \mu$, 证明:

(1) $Y'X = 0$;

(2) 若 X, Y 均为实向量, 证明 X 与 Y 线性无关.(2010年华中科技大学)

43. 已知 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 是复数域空间中的两个线性变换, 且

$$\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{A}$$

证明:

(1) $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 有一个公共的一维不变子空间 U;

(2) 若 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 均可对角化, 证明存在一组基, 使得 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 在这一组基下的矩阵均为对角阵.(2010年华中科技大学)

44. 已知 $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \mathscr{D}$ 为 V 上的线性变换, 并两两可交换, 并有 $\mathscr{A}\mathscr{C} + \mathscr{B}\mathscr{D} = \mathscr{I}$(单位变换), 证明

$$\ker \mathscr{A}\mathscr{B} = \ker \mathscr{A} + \ker \mathscr{B}$$

并且和为直和. (2012年华中科技大学)

45. V 为实数域上的 $2n+1$ 维空间, $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 为 V 上的线性变换, 且 $\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{A}$, 证明存在 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, v \in V$ 且 $v \neq 0$, 使得

$$\mathscr{A}(v) = \lambda v, \mathscr{B}(v) = \mu v.$$

(2012年华中科技大学)

46. 设 V 是域 $\mathbb{F}$ 上所有 n 阶矩阵所构成的 $n \times n$ 维线性空间, 固定 M, 定义映射

$$\mathscr{A}: V \to V, \mathscr{A}(A) = MA - AM.$$

(1) 证明 $\mathscr{A}$ 是线性空间 V 的线性变换;

(2)

$$M = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_\gamma \end{bmatrix}$$

为对角矩阵, 并且 $d_i = d_j (i \neq j), 1 \leq i, j \leq \gamma$, 求 $\mathscr{A}$ 的核 $\ker(\mathscr{A})$;

(3) 令 $M = \begin{bmatrix} d_1 & \\ & d_2 \end{bmatrix}$ 为对角阵, 取 V 的基

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

求 $\mathscr{A}$ 关于这组基下的矩阵.(2013年华中科技大学)

47. 设 $\mathscr{A}$ 是欧氏空间 V 的线性变换, $\mathscr{B}$ 是 V 的一个变换, 且对 $\forall \alpha, \beta \in V$, 都有

$$(\mathscr{A}(\alpha), \beta) + (\alpha, \mathscr{B}(\beta)) = 0.$$

证明:

(1) $\mathscr{B}$ 是 V 的线性变换;

(2) $\mathscr{B}$ 的值域 $\operatorname{Im} \mathscr{B}$ 等于 $\ker \mathscr{A}$ 的正交补.(2015年华中科技大学)

48. 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

在空间 $P^{2\times 2}$ 中定义变换 $\mathscr{A}(X) = AXB$. 证明: $\mathscr{A}(X)$ 为线性变换, 并求 $\mathscr{A}(X)$ 的特征多项式. (2017年华中科技大学)

49. 若 $R^{m\times m}$ 空间为矩阵空间，变换 σ 为 $R^{m\times m}$ 空间中的线性变换， A , B 为 $R^{m\times m}$ 空间中的矩阵, 用定义证明: 当 $m \neq n$ 时, σ 不可逆.(2019年华中科技大学)

50. 已知线性空间 V , 其中 σ, τ 为 V 的线性变换且

$$\sigma^2 = \tau^2 = \mathrm{id}, \sigma\tau + \tau\sigma = 0$$

其中 id 表示恒等变换, 试证明: 存在一组基使得 σ, τ 在这组基下面的矩阵分别为 $\begin{pmatrix} E & \\ & -E \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} & E \\ E & \end{pmatrix}$.(2019 年华中科技大学)

51. 设 $\mathbb{F}$ 是数域, V 表示数域 $\mathbb{F}$ 上所有次数小于 n 的多项式加上零多项式构成的线性空间. 令

$$\mathscr{A} : V \to V, f(x) \mapsto f(x+1) - f(x).$$

(1) 证明: $\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换.

(2) 证明:

$$\gamma_0 = 1, \gamma_1 = \frac{x}{1}, \gamma_2 = \frac{x(x-1)}{2!}, \cdots, \gamma_{n-1} = \frac{x(x-1)\cdots(x-n+2)}{(n-1)!}$$

是 V 的基底.

(3) 求 $\mathscr{A}$ 在上述基底下的矩阵.

(4) 证明: $\mathscr{A}$ 在上述基底下对应的矩阵不能相似对角化.(2011年华中师范大学)

52. 设 $v_1, v_2, \cdots, v_p$ 是 p 个互不相同的 n 维列向量. 设 M 是 $n\times m$ 复矩阵 $(p\leqslant m)$,它的前 l_1 列列向量均为 v_1, 它的 l_1+1 列到 l_2 列列向量均为 v_2, 它的最后 l_p 列列向量均为 v_p. 即 $M=(v_1,\cdots,v_1,v_2,\cdots,v_2,\cdots,v_p,\cdots,v_p)$ 为 M 按列向量分块. $\mathbb{C}^m,\mathbb{C}^n$ 分别表示 m 维和 n 维复列向量空间. 由 M 定义了一个线性映射

$$\mathscr{A}:\mathbb{C}^m\to\mathbb{C}^n,\alpha\to M\alpha.$$

令 $U(M)$ 是如下 m 维列向量构成的集合, 其中

$$U(M)=\left\{(u_1,u_2,\cdots,u_m)^T\in\mathbb{C}^m|u_1+\cdots+u_{l_1}=u_{(l_1+1)}+\cdots+u_{l_2}=\cdots=u_{(l_{p-1}+1)}+\cdots+u_m=0\right\}.$$

(1) 证明: $U(M)$ 是 $\mathbb{C}^m$ 的一个子空间并求这个子空间的维数和一组基底.

(2) 证明: $U(M)$ 是 $\mathscr{A}$ 的核空间 $\ker(\mathscr{A})$ 的子空间, 并给出 $U(M)=\ker(\mathscr{A})$ 的充分必要条件. (2013年华中师范大学)

53. 设 $\mathscr{A}$ 是从 $\mathbb{F}-$ 向量空间 V 到 U 的线性映射, 若对 V 的任意生成组 Ω 都有 $\mathscr{A}(\Omega)=\{\mathscr{A}(\omega)|\omega\in\Omega\}$ 是 U 的生成组. 证明 $\mathscr{A}$ 一定是满的线性映射. (2016年华中师范大学)

54. 设 V,U 是数域 $\mathbb{F}$ 上的有限维向量空间, 且 V 的维数是 n. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一组基底, 而 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 是 U 中任意 n 个向量. 证明:存在唯一的从 V 到 U 的线性映射 $\mathscr{A}$ 满足

$$\mathscr{A}\left(\alpha_i\right)=\gamma_i, i=1,\cdots,n.$$

(2017年华中师范大学)

55. 设 σ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, $\sigma(V)$ 的一组基为 $\beta_1,\cdots,\beta_n$, α_i 是 β_i 的原像, 即 $\sigma\left(\alpha_i\right)=\beta_i, i=1,2,\cdots,s, W=L\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_s\right)$. 证明:

(1) $V=W\oplus\sigma^{-1}(0)$;

(2) σ 的秩+ σ 的零度 $=n$. (2009年兰州大学)

56. 设 σ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换. 证明: $r\left(\sigma^2\right)=r(\sigma)$ 的充分必要条件为

$$V=\sigma(V)\oplus\sigma^{-1}(0).$$

(2015年兰州大学)

57. 设 $\mathscr{A}$ 是有限维线性空间 V 的线性变换, 证明: $V=\mathscr{A}V\oplus\mathscr{A}^{-1}(0)$ 充要条件是 $\mathscr{A}^2V=\mathscr{A}V$. (2009年南京师范大学)

58. 设 n 维线性空间上的线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征多项式为

$$f(\lambda)=\left(\lambda-\lambda_1\right)^{n_1}\left(\lambda-\lambda_2\right)^{n_2}, \lambda_1\neq\lambda_2,$$

并且有

$$\mathscr{A}\alpha_1=\lambda_1\alpha_1,(\mathscr{A}-\lambda_1\varepsilon)\alpha_2=\alpha_1,\cdots,(\mathscr{A}-\lambda_1\varepsilon)\alpha_{n_1}=\alpha_{n_1-1},$$
$$\mathscr{A}\beta_1=\lambda_2\beta_1,(\mathscr{A}-\lambda_2\varepsilon)\beta_2=\beta_1,\cdots,(\mathscr{A}-\lambda_2\varepsilon)\beta_{n_2}=\beta_{n_2-1},$$

证明: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n_1},\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n_2}$ 构成整个线性空间的一组基, 并写出 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵. (2009年南京师范大学)

59. 设 σ 是 n 维线性空间 V 的线性变换, 证明: $\sigma(V)$ 的一组基的原像及 $\sigma^{-1}(0)$ 的一组基合起来就是 V 的一组基. (2012 年南京师范大学)

60. 证明: n 维 $(n>2)$ 实线性空间 V 的一个线性变换 σ 必有一维或二维不变子空间. (2014年南京师范大学)

61. 设 σ 和 τ 是 n 维线性空间 V 的两个线性变换, 满足 $\sigma+\tau=\varepsilon$(恒等变换), 且 $\sigma\tau=0$. 证明:

$$V=\sigma(V)\oplus\tau(V).$$

(2015年南京师范大学)

62. 证明: 若线性变换 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ 满足

$$\mathscr{A}^2=\mathscr{A},\mathscr{B}^2=\mathscr{B},\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}=0$$

则 $(\mathscr{A}+\mathscr{B})V=\mathscr{A}V\oplus\mathscr{B}V$. (2017 年南京师范大学)

63. 设 P 为数域, T为 $P^{n\times n}$ 上的线性变换, 满足条件: 对任何固定的 $A,B\in P^{n\times n}$, $\mathrm{T(AB)}=\mathrm{T(A)T(B)}$ 和$\mathrm{T(AB)}=\mathrm{T(B)T(A)}$ 至少有一个成立. 证明: 或者对所有的 $A,B\in P^{n\times n}$ 成立 $\mathrm{T(AB)}=\mathrm{T(A)T(B)}$ 或者对所有的 $A,B\in P^{n\times n}$ 成立 $\mathrm{T(AB)}=\mathrm{T(B)T(A)}$.

64. 设 V 为 n 维复线性空间, End V 为 V 上所有线性变换构成的线性空间，又 A,B 为End V 的子空间, 且 $A\subseteq B$. 令:

$$M=\{x\in\operatorname{End}V|xy-yx\in A,\forall y\in B\}$$

假定 $x_0\in M$ 满足条件 $\operatorname{tr}(x_0y)=0,\forall y\in M$. 证明: x_0 必为幂零线性变换. (2010年南开大学)

65. 设 V 为复数域上的 $4n$ 维线性空间, 证明: 存在 V 上的线性变换 T 使得 $T^4=-\mathrm{id}$, 其中 id 为恒等变换, 并且满足上述条件的线性变换必然在某组基下的矩阵为对角矩阵. (2011 年南开大学)

66. (20 分) $\mathscr{A}$ 为n 维线性空间V 上的线性变换, 特征多项式为

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$$

$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 各不相同, 且$r_1+r_2+\cdots+r_s=n$, 令 $f_i(\lambda)=\frac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_i)^{r_i}}$, 证明:

$$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$$

其中 $V_i=\operatorname{Im}f_i(\mathscr{A})$. (2016年南开大学)

67. 设 V 为复数域上的 n 维线性空间, σ,τ 为 V 中的两个线性变换, 如果 $\sigma\tau=\tau\sigma$, 证明 σ,τ 至少有一个公共的特征向量. (2017年南开大学)

68. 设 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ 均是线性空间 V 上的线性变换, 且. Ker $\mathscr{A}\subset$ Ker$\mathscr{B}$, 证明: 存在线性变换 $\mathscr{T}$, 使得 $\mathscr{A}=\mathscr{T}\mathscr{B}$.

69. 设 V 为 n 维欧氏空间, $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 为 V 到 V 的映射, k 为固定非零实数, 且 $\forall\alpha,\beta\in V$ 有

$$(\mathscr{A}\alpha,\beta)=k(\alpha,\mathscr{B}\beta)$$

(1) 求证 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 为 V 上线性变换;

(2) 如果 $\mathscr{A}=\mathscr{B}$, 且 $\mathscr{A}$ 为非零映射, 求证 $k=1$ 或者 $k=-1$. (2010年上海大学)

70. (15 分) 设V 是全体实2×2 矩阵所构成的实线性空间, $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in V$, 定义$V$ 的变换$\mathscr{A}x=Ax,\forall x\in V$.

(1) 证明: 变换 $\mathscr{A}$ 是线性的.

(2) 当 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ 时, 求 $\mathscr{A}$ 的核和值域及它们的一组基. (2014 年上海大学)

71. 设 $\mathscr{A}_1,\cdots,\mathscr{A}_s$ 为数域 F 上 n 维线性空间 V 上的两两不同的线性变换. 证明: 存在 $v\in V$, 满足 $\mathscr{A}_iv\neq\mathscr{A}_jv$ 对任意 $i\neq j$. (2010 年上海交通大学)

72. V 为代数闭域 F 上的 n 维线性空间, $\mathscr{A}$ 为 V 上的线性变换. 证明: 存在唯一的 V 上的线性变换 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$,满足 $\mathscr{A}=\mathscr{B}+\mathscr{C}$, $\mathscr{B}$ 是可对角化的, $\mathscr{C}$ 是幂零的, 且 $\mathscr{B}$ 与 $\mathscr{C}$ 可交换. (2011年上海交通大学)

73. 设 $A\in P^{n\times n}$, 定义由 $P^{n\times n}$ 到自身的映射 T 为: 对任意 $X\in P^{n\times n}$, 有 $T(X)=XA$.

(1) 简要证明 T 是线性变换;

(2) 试问 T 是否可逆? 为什么?

(3) 已知 $A=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $n=2$, 求 T 在基 $\{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}\}$ 下的矩阵. 其中: $E_{ij},i=1,2;j=1,2$ 为 (i,j) 元是 1, 其余元是0的二阶方针. (2014年上海交通大学)

74. 设 $A\in C^{m\times n}$, 视 A 为 $C^n\to C^m$ 的线性映射, 证明:
$N(A)\perp R\left(A^H\right)$ 且$C^n=N(A)\oplus R\left(A^H\right)$ 其中: C 为复数域, $N(A)$ 为A 的零空间(即核), $R(A)$ 为 A 的象空间(即值域). (2015年上海交通大学)

75. 设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 为 n 维线性空间 V 上的线性变换, 使得 $(\mathscr{B}\mathscr{A})^2=\varepsilon$(其中$\varepsilon$ 是V 上的恒等变换), ($\mathscr{C}=\varepsilon-\mathscr{A}\mathscr{B}$, 证明:

$$\ker(\mathscr{C})=\operatorname{Im}(\mathscr{C}-2\varepsilon)$$

(2013年首都师范大学)

76. 设V是$\mathbb{F}$上的线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是V的一个基.设V上的一个线性变换$\mathcal{A}$ 满足$\mathcal{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$ ，且$\mathcal{A}^2=\mathcal{A}$ 证明：$ker\mathcal{A}+Im\mathcal{A}$ 是直和，这里，$ker\mathcal{A}$ 和$Im\mathcal{A}$ 分别是$\mathcal{A}$ 的核和像.(2010年四川大学)

77. 设V是数域F上的n维线性空间，$End(V)$ 表示V上的全体线性变换组成的线性空间.

（1）求$dimEnd(V)$ 并写出$End(V)$ 的一组基.

（2）设$\mathcal{A}\in End(V)$ ，设$\mathcal{A}$ 的特征多项式为$f(x)$.证明：如果V可以分解为非平凡的$\mathcal{A}$ 不变子空间的直和，那么，$f(x)$ 在F上可约.问：此结论的逆命题是否成立？说明理由.(2011年四川大学)

78. 设A，B是数域F上的$m\times n$ 型矩阵，$M_{m\times n}(F),M_{n\times m}(F)$ 分别是F上的所有$m\times n$ 型矩阵，$n\times m$ 型矩阵组成的线性空间.证明：当$m\neq n$ 时，由

$$f(X)=ABX,X\in M_{n\times m}$$

给出的从$M_{n\times m}(F)$ 到$M_{m\times n}(F)$ 的线性映射f 不是可逆的.(2012年四川大学)

79. 设$T:V\rightarrow W$ 是数域F上的线性空间之间的线性映射.

（1）证明：T是单射当且仅当对任意满足$TS=0$ 的线性映射$S:U\rightarrow V$ ，都有$S=0$ ；T是满射当且仅当对任意满足$RT=0$ 的线性映射$R:W\rightarrow X$ ，都有$R=0$.

（2）设$dimV<\infty,dimW<\infty$.设W_1 是W的子空间.证明：

$$dimT^{-1}(W_1)\geq dimV-dimW+dimW_1.$$

(2012年四川大学)

80. 设V是复数域$\mathbb{C}$ 上的有限维线性空间，H是由V上的两两可交换且可对角化的线性变换组成的线性空间.证明：存在若干线性函数$\alpha_i:H\rightarrow\mathbb{C}$ 使得有如下的子空间直和分解：

$$V=\bigoplus_{i=1}^{m}V_i.$$

其中$V_i=\{v\in V|h(v)=\alpha_i(h)v,\forall h\in H\}$.(2012年四川大学)

81. 设A是实数域上的$m\times n$ 型矩阵.设$f:F^n\rightarrow F^m$ 是映射$X\mapsto AX$.证明：f 是单射当且仅当A的列向量线性无关；f 是满射当且仅当A的行向量线性无关.(2013年四川大学)

82. 设A是数域F上的n阶方阵，A的特征多项式在F上不可约.设$M_n(\mathbb{C})$ 是所有n阶复方阵组成的线性空间.

（1）证明：A是可逆矩阵.

（2）设σ_A 是$M_n(\mathbb{C})$ 上的如下线性变换：

$$\sigma_A(X)=A^{-1}X-XA^{-1},X\in M_n(\mathbb{C}).$$

记σ_A 的核为$ker\sigma_A,\sigma_A$ 的像为$Im\sigma_A$.求$ker\sigma_A\bigcap Im\sigma_A$ 的维数. (2013年四川大学)

83. 设V是数域F上的n维线性空间，$End(V)$ 是V的所有线性变换组成的集合.

（1）证明：对任意$0 \neq \alpha \in V$ 都有$V = \{\mathcal{A}\alpha | \mathcal{A} \in End(V)\}$.

（2）不用Hamilton-Caylay定理直接证明：对任意$\mathcal{A} \in End(V)$ 都存在F上的多项式$f(x)$ 使得$f(\mathcal{A}) = 0$

（3）上述两个结论对无穷维线性空间是否成立？简要说明理由. (2014年四川大学)

84. 设V是数域F上的线性空间，V^* 是V的对偶空间，T是V上的线性变换.

（1）对任意$f \in V^*$ ，定义V上的函数$f^* : V \to F$ 为：$f^*(\alpha) = f(T(\alpha)), \alpha \in V$.证明：映射$T^* : f \mapsto f^*$ 是V^* 上的线性变换.

（2）设$\alpha_1, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是V的一组基，且T在这个基下的矩阵为A.求1中的线性变换T^* 在对偶基$\alpha_1^*, \alpha_1^*, \cdots, \alpha_n^*$ 下的矩阵.

（3）设$dimV = n$.证明：T是V上的可逆线性变换当且仅当T^* 是V^* 上的可逆线性变换. (2015年四川大学)

85. 设V是数域F上的n维线性空间，T是V上的线性变换，$\lambda_1, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in F$ 互不相同，且都不是T的特征值；I是V上的恒等变换.

（1）证明：对每个$1 \leq i \leq n, T - \lambda_i I$ 都是V的可逆线性变换.

（2）证明：存在$a_1, a_1, \cdots, a_n \in F$ 使得

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (T - \lambda_k I)^{-1} = I.$$

(2015年四川大学)

86. 设$\mathcal{A}$ 是数域F上的有限维线性空间V上的线性变换.

（1）设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in F$ 是$\mathcal{A}$ 的互不相同的特征值，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 分别是$\mathcal{A}$ 的属于$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 的特征向量.证明：如果$\mathcal{A}$ 的一个不变子空间满足$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k \in W$ ，则$dimW \geq k$.

（2）给出一个非零的、既不是单射也不是满射的$\mathcal{A}$ 的例子.

（3）设$C(\mathcal{A})$ 是V的所有与$\mathcal{A}$ 可交换的线性变换组成的集合.求$\mathcal{A}$ 使得$dimC(\mathcal{A})$ 最大.

（4）设F是复数域且$\mathcal{A}$ 可逆.证明：存在V上的线性变换$\mathcal{B}$ 使得$\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$. (2016年四川大学)

87. 设V是n维线性空间，$V_1, V_2, \cdots, V_s (s > 1)$ 是V的子空间，且

$$V = V_1 \bigoplus V_2 \bigoplus \cdots \bigoplus V_s.$$

证明：存在V上的线性变换，使得

1.$\sigma_i^2 = \sigma_i (1 \leq i \leq s)$;

2.$\sigma_i \sigma_j = 0 (1 \leq i, j \leq s \text{且} i \neq j)$;

3.$\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_s = \varepsilon$是恒等变换;

4.$\sigma_i(V) = V_i (1 \leq i \leq s)$.(2011年武汉大学)

88. 设σ_1,σ_2 都是n维线性空间V的线性变换，证明：$ker(\sigma_1)\subset ker(\sigma_2)$ 的充要条件是存在V的一个线性变换σ ，使得$\sigma_2=\sigma\sigma_1$.(2013年武汉大学)

89. 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是n阶实对称矩阵A的全部特征值，但$-\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 不是A的特征值，定义$\mathbb{R}^{n\times n}$ 的线性变换

$$\sigma(X)=A^TX+XA,\forall X\in\mathbb{R}^{n\times n}.$$

证明：

1.σ 是可逆线性变换;

2.对任意实对称矩阵C，必存在唯一的实对称矩阵B，使得$A^TB+BA=C$.(2013年武汉大学)

90. 设数域K上的n维线性空间V到m维线性空间V' 上的所有线性映射组成空间$Hom_k(V,V')$ ，证明：

（1）$Hom_k(V,V')$ 是线性空间;

（2）$Hom_k(V,V')$ 的维数为mn .(2014年武汉大学)

91. 已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$ 是线性空间V中的一组基，φ 是线性空间V上的线性变换，且

$$\varphi(\alpha_1)=\alpha_1,\varphi(\alpha_2)=\alpha_1+\alpha_2,\varphi(\alpha_3)=\alpha_2+\alpha_3,\varphi(\alpha_3)=\alpha_3+2\alpha_4,\varphi(\alpha_5)=2\alpha_5,\varphi(\alpha_6)=\alpha_5+3\alpha_6.$$

1.求出所有二维的φ 的不变子空间，并说明理由;

2.证明φ 不是循环变换，即$\forall\alpha\in V,\alpha,\varphi(\alpha),\varphi^2(\alpha),\cdots,\varphi^5(\alpha)$ 不构成一组基. (2015年武汉大学)

92. 设V是数域F上的n维线性空间，σ 是V上的线性变换.设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是V的一个基，线性变换σ 在这个基下的矩阵为A，记$EndV$ 是V上全体线性变换构成的线性空间，作$EndV$ 到$M_n(F)$ 的映射$f:f(\sigma)=A$.证明：映射f 是$EndV$ 到$M_n(F)$ 的一个同构映射. (2017年武汉大学)

93. 设V是数域F上的n维线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是V的一组基，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是V任意n个向量.证明：存在唯一线性变换σ ，使得$\sigma(\alpha_i)=\beta_i,i=1,2,\cdots,n$.(2018年武汉大学)

94. 设σ 是数域F上向量空间V上一个线性变换，且满足$\sigma^2=\sigma$ ，证明：

1.$ker\sigma=\{\xi-\sigma(\xi)|\xi\in V\}$;

2.$V=ker\sigma\bigoplus Im\sigma$;

3.如果τ 是V上的另一个线性变换，则$ker\tau$ 和$Im\sigma$ 都在τ 之下不变的充要条件是$\tau\sigma=\sigma\tau$.(2018年武汉大学)

95. 设P是数域，集合

$$W=\left\{\begin{pmatrix}a&0\\b&c\end{pmatrix}|a,b,c\in P\right\}.$$

（1）证明：W对于矩阵加法和数量乘法构成一个线性空间.

（2）令$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ ，变换$\mathcal{A}:W\to W$ 定义为$\mathcal{A}(X)=AX(\forall X\in W)$.证明：$\mathcal{A}$ 是W的线性变换.

（3）写出W的一组基及维数，求$\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵.

（4）求出$\mathcal{A}$ 的特征值及相应的全部特征向量. (2011年湘潭大学)

96. 设$\mathcal{A}$ 是有限维线性空间V的可逆线性映射，W是V中$\mathcal{A}$ 的不变子空间.证明：W也是V中$\mathcal{A}^{-1}$ 的不变子空间. (2011年湘潭大学)

97. 设P是一数域，集合
$$V=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}|a,b,c,d\in P,a+b=0\right\}.$$
（1）证明：V对于矩阵的加法和数量乘法构成线性空间.

（2）令$A=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，变换$\mathcal{A}:V\to V$ 定义为$\mathcal{A}(X)=AX,\forall X\in V$.证明：$\mathcal{A}$ 是V的线性变换.

（3）写出V的一组基，并求$\mathcal{A}$ 在这一组基下的矩阵.

（4）求出$\mathcal{A}$ 的特征值及其全部特征向量. (2012年湘潭大学)

98. 令$\mathcal{A}$ 为有限维线性空间V的线性变换，证明：$\mathcal{A}^2$ 的秩等于$\mathcal{A}$ 的秩当且仅当$V=\mathcal{A}V\bigoplus\mathcal{A}^{-1}(0)$ 其中$\mathcal{A}V$ 表示$\mathcal{A}$ 的值域，$\mathcal{A}^{-1}(0)$ 表示$\mathcal{A}$ 的核. (2014年湘潭大学)

99. 令$M_n(\mathbb{R})$ 为实数域上所有n阶矩阵构成的线性空间，变换$\mathcal{A}:M_n(\mathbb{R})\to M_n(\mathbb{R})$ 定义为：
$$\mathcal{A}(X)=AX+XA,\forall X\in M_n(\mathbb{R}),$$
其中$A\in M_n(\mathbb{R}$ 为实对称矩阵.

（1）给出$M_n(\mathbb{R})$ 的维数和一组基.

（2）证明：$\mathcal{A}$ 为线性变换.

（3）证明：$\mathcal{A}$ 可对角化，即$\mathcal{A}$ 在$M_n(\mathbb{R})$ 的某一组基下的矩阵为对角阵. (2015年湘潭大学)

100. 令V为复数域上的n维线性空间，线性变换$\mathcal{A}$ 在V的一组基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为下三角若当块，证明：

（1）$V_i=L(\alpha_i,\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_n)$ 为$\mathcal{A}$ 不变子空间.

（2）V中任意非零的$\mathcal{A}$ 不变子空间都包含有α_n .(2015年湘潭大学)

101. 令$P[x]_n$ 为数域P上次数小于n的多项式所构成的线性空间，定义$P[x]_n$ 上的变换为
$$\mathcal{A}(f(x))=(n-1)f(x)-xf'(x),\forall f(x)\in P[x]_n,$$
其中$f'(x)$ 为$f(x)$ 的微商.证明：

（1）$\mathcal{A}$ 是$P[x]_n$ 上的线性变换.

（2）求线性变换$\mathcal{A}$ 的值域$\mathcal{A}P[x]_n$ 与核$\mathcal{A}^{-1}(0)$.

（3）证明：
$$P[x]_n=\mathcal{A}P[x]_n\bigoplus\mathcal{A}^{-1}(0).$$
.(2016年湘潭大学)

102. 令n阶矩阵A的零特征值的个数为s，其特征子空间$V=\{X|AX=0\}$ 的维数为k.证明：$r(A)=r(A^2)$ 当且仅当$s=k$.(2017年湘潭大学)

103. 令$\lambda=\alpha+i\beta$ 为n阶实矩阵A的特征值且$\beta\neq 0$ ，及相应特征向量为$v=x+iy$ ，其中$i=\sqrt{-1}$.证明：

（1）$L(x,y)$ 是A的2维不变子空间.

（2）存在可逆矩阵X使得$X^{-1}AX=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{pmatrix}$ ，其中$A_{11}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}$.(2017年湘潭大学)

104. 令$\mathcal{A}$ 为有限维线性空间V的线性变换，且$\mathcal{A}^2=\mathcal{A}$ 证明：

（1）$\mathcal{A}^{-1}(0)=\{\alpha-\mathcal{A}\alpha|\alpha\in V\}$.

（2）$V=\mathcal{A}V\bigoplus\mathcal{A}^{-1}(0)$. (2018年湘潭大学)

105. 设V是复数域上的n维线性空间，$\mathcal{A},\mathcal{B}$ 是V上的线性变换，且$\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{A}$ ，证明：

（1）$\mathcal{A},\mathcal{B}$ 至少有一个公共的特征向量.

（2）在V中存在一组基，使得$\mathcal{A},\mathcal{B}$ 在这组基下的矩阵同时为对角阵. (2018年湘潭大学)

106. 设$\mathcal{A}$ 是线性空间V的线性变换，α 是V中的非零向量，m是大于1的正整数，如果向量组$\alpha,\mathcal{A}(\alpha),\cdots,\mathcal{A}^{m-1}(\alpha)$ 线性无关，而向量组$\alpha,\mathcal{A}(\alpha),\cdots,\mathcal{A}^{m-1}(\alpha),\mathcal{A}^{m}(\alpha)$ 线性相关.

（1）证明：由$\alpha,\mathcal{A}(\alpha),\cdots,\mathcal{A}^{m-1}(\alpha)$ 生成的子空间W是$\mathcal{A}$ 的不变子空间;

（2）求W的一组基，并求$\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵. (2014年云南大学)

107. 设Φ,Ψ 是某数域上n维线性空间上的两个线性变换，满足$\Phi\circ\Psi=\Psi\circ\Phi$ ，而且存在正整数N使得$\Phi^N=0$ 为零线性变换，证明$\Phi+\Psi$ 为可逆线性变换的充要条件是Ψ 为可逆线性变换. (2010年浙江大学)

108. 设A是n阶线性空间V的线性变换，$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 为A的不同特征值，V_{λ_i} 为其特征子空间.证明：对任意V的子空间W，有

$$W=(W\cap V_{\lambda_1})\oplus\cdots\oplus(W\cap V_{\lambda_m}).$$

(2014年浙江大学)

109. 设$f:v\to w$ 为线性满映射.

（1）$\forall\alpha\in w,f^{-1}(\alpha)=\beta+ker(f)$ （β 为v上任意一个向量满足$f(\beta)=\alpha$ ）;

（2）适当定义乘法和下面定义的加法：

证明：$v/ker(f)=\{\beta+ker(f)|\beta\in v\}$ 构成空间;

（3）适当定义同构映射，证明$v/ker(f)$ 与$Im(f)$ 同构. (2015年浙江大学)

110. 设$\mathbb{T}$ 是复数域上n维线性空间V的线性变换，满足$\mathbb{T}^k=id_V$ （V上的恒等线性变换），其中$1\leq k\leq n$ ，证明$\mathbb{T}$ 必然可以对角化. (2016年浙江大学)

item 已知V是复线性空间，对任意的$A\in V$ ，定义变换$\sigma(A)=\overline{A}$ ，证明当V是实数域上的复线性空间时，σ 是V上的线性变换，并求V的一组基，使得σ 在这组基下的矩阵为对角阵，同时说明当V是复数域上的复线性空间时，σ 不是V上的线性变换. (2017年浙江大学)

111. 设$\mathcal{A}: U \to V$ 为数域F上的线性空间U到V上的线性映射.证明：

$$dimKer\mathcal{A} + dimIm\mathcal{A} = dimU.$$

(2010年中科大)

112. 设数域F上有限维空间V上线性变换$\mathcal{A},\mathcal{B}$ 满足$\mathcal{A}\mathcal{B} = a\mathcal{B}\mathcal{A}(a \in F, a \neq 1)$ ，且$\mathcal{A}$ 是可逆线性变换，证明：

（1）$\mathcal{B}$ 为幂零矩阵;

（2）$\mathcal{A}$ 和$\mathcal{B}$ 有一个公共特征向量. (2010年中科大)

113. 设$\mathcal{A}$ 是无限维线性空间V的线性变换，$\mathcal{B}$ 是$\mathcal{A}$ 在$Im\mathcal{A}$ 上的限制变换.求证：$V = Im\mathcal{A} \oplus Ker\mathcal{A}$ 的充要条件是$\mathcal{B}$ 可逆. (2011年中科大)

114. 设$\mathcal{A}$ 是数域F上n维线性空间V上的线性变换.已知$\mathcal{A}$ 的特征多项式$\varphi_{\mathcal{A}}(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda)$ ，其中$f(\lambda), g(\lambda)$ 是数域F上两个互素的多项式.求证：

（1）$Imf(\mathcal{A}) = Kerg(\mathcal{A})$;

（2）$V = Imf(\mathcal{A}) \oplus Img(\mathcal{A})$.(2012年中科大)

115. 设$\mathcal{A}$ 是数域F上的有限维线性空间V上的线性变换，求证：

$$dim(Im\mathcal{A} \cap Ker\mathcal{A}) = rank\mathcal{A} - rank\mathcal{A}^2.$$

(2013年中科大)

116. 设$\mathcal{A}$ 是数域F上的线性空间V上的线性变换，$f_1(x)$ 和$f_2(x)$ 是F上的多项式，$g(x)$ 是$f_1(x)$ 和$f_2(x)$ 的最大公约式，$h(x)$ 是$f_1(x)$ 和$f_2(x)$ 的最小公倍式.求证：$Kerh(\mathcal{A}) = Kerf_1(\mathcal{A}) \oplus Kerf_2(\mathcal{A})$ 的充要条件是$g(\mathcal{A})$ 可逆. (2013年中科大)

117. 设$\mathcal{A}$ 是线性空间V上的线性变换.求证：存在V的子空间W与$Im\mathcal{A}$ 同构，并且$V = W \oplus Ker\mathcal{A}$.(2014年中科大)

118. 设$\mathcal{A}$ 是n维实线性空间V的线性变换,$n \geq 1$.求证:$\mathcal{A}$ 至少存在一个一维或者二维的不变子空间. (2010年国科大)

119. 设$M_n(\mathbb{C})$ 是复数域上所有n阶方阵组成的线性空间,$T: M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ 是线性映射,满足$T(AB) = T(BA)$,求证:$\forall A \in M_n(\mathbb{C})$,总存在$\lambda \in \mathbb{C}$ 使得$T(A) = \lambda tr(A)$.(2010年国科大)

120. 设$T_1, T_2, \cdots, T_n$ 是数域F上线性空间V的非零线性变换,试证明存在向量$\alpha \in V$,使得$T_i(\alpha) \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n$.(2012年国科大)

121. 设V是数域F上的有限维向量空间,ϕ 是V上的线性变换.证明:V能够分解为两个子空间的直和$V=U\oplus W$.其中U,W 满足:对任意的$u\in U$,存在正整数k使得$\phi^k(u)=0$;对任意的$w\in W$,存在$v_m\in V$,使得$w=\phi^m(v_m)$ 对所有的正整数m成立. (2013年国科大)

122. 设V是实数域上的n维向量空间,ϕ 是V上的线性变换,满足$\phi^3=-\varepsilon$ (ε是V上的恒等变换).

(1)证明n是偶数.

(2)若ψ 是V上的线性变换,满足$\psi\phi=\phi\psi$,证明$det(\psi)\geq 0$. (2013年国科大)

123. 线性空间V的两个线性变换f,g 满足$Kerf\subseteq Kerg$,证明

(1)存在线性变换h ,使得$g=hf$.

(2)若$Kerf=Kerg$,则存在线性变换g ,使得$g=hf$.(2015年国科大)

124. 设V为数域P上的线性空间,$\mathcal{A}$ 为V的线性变换,$f(x),g(x)\in P[x],h(x)=f(x)g(x)$.证明:若$(f(x),g(x))=1$,则

$$kerh(\mathcal{A})=kerf(\mathcal{A})\oplus kerg(\mathcal{A}).$$

(2010年中南大学)

125. 设V是数域F上一个有限维向量空间,$\mathcal{A}:V\to V$ 是一个线性变换.设$v\in V,v\neq 0$,且V由$\{v,\mathcal{A}v,\cdots,\mathcal{A}^jv,\cdots\}$ 生成.

(1)证明:存在一个正整数$k\geq 1$ 使得$v,\mathcal{A}v,\cdots,\mathcal{A}^{k-1}v$ 是线性无关的,且

$$\mathcal{A}^kv=\alpha_0v+\alpha_1\mathcal{A}v+\cdots+\alpha_{k-1}\mathcal{A}^{k-1}v,$$

这里$\alpha_0,\cdots,\alpha_{k-1}\in F$.

(2)证明:$\{v,\mathcal{A}v,\cdots,\mathcal{A}^{k-1}v\}$ 是V的一组基.

(3)证明:$\mathcal{A}$ 的最小多项式等于特征多项式.

(4)证明:如果

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

那么不存在列向量$v\in\mathbb{R}^4$,使得$\mathbb{R}^4$ 由$\{v,Av,\cdots,A^jv,\cdots\}$ 生成. (2011年中南大学)

126. 设$\mathcal{A},\mathcal{B}$ 是复数域上$n(n>0)$ 维线性空间V的两个线性变换.满足$\mathcal{AB}-\mathcal{BA}=\mathcal{A}$.如果λ_0 是$\mathcal{A}$ 的一个特征值,η 是$\mathcal{A}$ 的属于λ_0 的一个特征向量,m是使$\eta,\mathcal{B}\eta,\cdots,\mathcal{B}^m\eta$ 线性相关的最小正整数,W_m 是由$\eta,\mathcal{B}\eta,\cdots,\mathcal{B}^{m-1}\eta$ 所生成的线性子空间.

(1)证明W_m 是$\mathcal{A}$ 的不变子空间.

(2)求$\mathcal{A}|W_m$ 的迹,其中$\mathcal{A}|W_m$ 是$\mathcal{A}$ 在$|W_m$ 上的限制. (2012年中南大学)

127. 设$\mathcal{A}$ 是复数域上n维线性空间V的一个非零且不可逆线性变换,证明:存在$\mathcal{A}$ 的不变子空间V_1 和V_2 ,使得

$$V = V_1 \oplus V_2,$$

且$\mathcal{A}|V_1$ 为可逆变换,$\mathcal{A}|V_2$ 为幂零变换. (2014年中南大学)

128. 设$\mathcal{A}$ 是数域P上的n维线性空间V的一个线性变换.若$ker\mathcal{A}^k = ker\mathcal{A}^{k+1}$,其中k为某个正整数,证明:

$$V = ker\mathcal{A}^k \oplus Im\mathcal{A}^k.$$

(2015年中南大学)

129. 设$\mathcal{A}$ 为复数域上n维线性空间V上的一个线性变换,且

$$tr(\mathcal{A}^k) = 0(k = 1, 2, \cdots, n).$$

证明:$\mathcal{A}$ 是幂零变换. (2016年中南大学)

130. 设$\mathcal{A}$ 是实数域上$n(n \geq 1)$ 维线性空间V上的一个线性变换.证明:$\mathcal{A}$ 至少有一个维数是1或2的不变子空间. (2016年中南大学)

131. 在数域F上,线性空间V上的一个线性变换$\mathcal{A}$ 满足$\mathcal{A}^3 = I$,I为恒等变换,证明:

$$V = ker(\mathcal{A} - I) \oplus ker(\mathcal{A}^2 + \mathcal{A} + I).$$

(2017年中南大学)

132. 设$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, f(A)$ 是$\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ 的一个线性映射.

(1)证明:对任意的A,都有唯一的$C \in \mathbb{R}^{n\times n}$,使得

$$f(A) = tr(AC).$$

(2)对$\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$,若有$f(AB) = f(BA)$,证明:

$$f(A) = \lambda f(E), \lambda = tr(A).$$

(2017年中南大学)

133. 设$f(x), g(x)$ 是数域F上的多项式,$m(x) = [f, g]$ 是它们的首一最小公倍式,σ 是F上线性空间V的一个线性变换.证明:

$$kerf(\sigma) + kerg(\sigma) = kerm(\sigma).$$

(2010年中山大学)

134. 设σ 是复线性空间V的一个线性变换.证明:σ 相似于对角矩阵当且仅当对任意σ 子空间U都有σ 子空间U' 使得$V=U\oplus U'$.(2010年中山大学)

135. 设A,B是n阶实对称矩阵,且B是正定矩阵.证明:存在实可逆矩阵C使得C^TAC 和C^TBC 都是实对角矩阵. (2010年中山大学)

136. 设V是数域F上的线性空间,S和T是V的子空间,f 是V上的线性变换.V^* 表示V的对偶空间,S^0 表示S的零化子,即$S^0=\{f\in V^*:f(S)=0\}$,而f^* 表示f 的转置,即$f^*:V^*\to V^*,g\mapsto gf,\forall g\in V^*$.证明:
(1)$(S\cap T)^0=S^0+T^0$;
(2)$Imf^*=(kerf)^0$.(2011年中山大学)

137. 设f 是F上的线性空间$M_n(F)$ 到F的线性映射,$f(I)=n$ 且对任意的矩阵$A,B\in M_n(F)$ 有$f(AB)=f(BA)$.证明:$f=tr$. (2013年中山大学)

138. 设V是数域F上的n为线性空间,σ,τ 都是V上的线性变换,V是σ 循环子空间,且$\sigma\tau=\tau\sigma$.证明:存在某个多项式$f(x)$ 使得$\tau=f(\sigma)$. (2014年中山大学)

139. 设σ,τ 为n维线性空间V上的线性变换,id_V 是V上的恒等变换.证明:若$\sigma\tau=id_V$,则$\tau\sigma=id_V$. (2017年中山大学)

140. 设σ 是n维实向量空间V上的线性变换,并且有正整数m使得σ^m 是V上的恒等变换.证明在V中存在一组基使得σ 在这组基下的矩阵为正交矩阵. (2018年中山大学)

五.问答题

1. 设$\mathscr{A}_1,\cdots,\mathscr{A}_{2012}$为线性空间上的2012个互不相同的线性变换, 问是否存在向量$\alpha\in V$使得

$$\mathscr{A}_1\alpha,\cdots,\mathscr{A}_{2012}\alpha \text{ 都不相等}$$

. (2012年北京大学)

2. 下列$\mathbb{R}^2$上的线性变换$\mathscr{A}$是否可以对角化?
(1)$\mathscr{A}(x,y)=(x-2y,x-y)$;
(2)$\mathscr{A}(x,y)=(x+y,2y)$. (2011年湖南师范大学)