国内部分重点高校硕士研究生入学考试高等代数试题
(行列式部分)

一. 填空题

1. 如果$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}=1$, 则$\begin{vmatrix} x_2+x_3 & x_1+x_3 & x_1+x_2 \\ y_2+y_3 & y_1+y_3 & y_1+y_2 \\ z_2+z_3 & z_1+z_3 & z_1+z_2 \end{vmatrix}=$________. (2011年北京工业大学)

2. 如果$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & x+1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & x-3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & x+5 \end{vmatrix}=0$的四个根是$x_1,x_2,x_3,x_4$, 则$\sum\limits_{k=1}^{4} x_k=$________. (2011年北京工业大学)

3. 若A是3阶实矩阵, $A+E,A-E,A+2E$都不可逆, 则行列式$|A^*+A^{-1}|=$________. (2011年北京工业大学)

4. 如果$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & x-2 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & x-1 & -9 \\ -1 & -8 & 1 & x+27 \end{vmatrix}=0$的四个根是$x_1,x_2,x_3,x_4$, 则$\prod\limits_{k=1}^{4} x_k=$________. (2012年北京工业大学)

5. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 \end{vmatrix}=$________. (2012年北京工业大学)

6. 一个n阶行列式D的元素由$a_{ij}=\max\{i,j\}$给定, 则$D=$________. (2013年北京工业大学)

7. 设$D_n=|a_{ij}|_{n\times n}$是n阶行列式, 其中$a_{ii}=2, a_{i,i+1}=a_{i+1,i}=-1, (i=1,2,\cdots,n-1)$, 则$D_n=$________(写出具体表达式). (2014年北京工业大学)

8. 设A是n阶方阵, α为$n\times 1$矩阵, β为$1\times n$矩阵, 且$|A|=2$, $\begin{vmatrix} A & \beta \\ \alpha & 1 \end{vmatrix}=0$, 则$\begin{vmatrix} A & \beta \\ \alpha & 4 \end{vmatrix}=$________. (2015年北京工业大学)

9. 如果$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & x-3 & 1 & 4 \\ -1 & -9 & x-1 & -16 \\ -1 & -27 & 1 & x+64 \end{vmatrix}=0$的四个根是$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$, 则$\prod\limits_{k=1}^{4}\lambda_k=$________. (2015年北京工业大学)

10. 设n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}$$

, 则其值为________. (2010年北京交通大学)

11. 设n阶行列式$D=|a_{ij}|=d$. 则行列式$D_1=\begin{vmatrix} 2a_{21} & 2a_{22} & \cdots & 2a_{2n} \\ 3a_{31} & 3a_{32} & \cdots & 3a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ na_{n1} & na_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}=$________. (2011年北京交通大学)

12. 5阶行列式

$$D_5=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

的值为________. (2012年北京交通大学)

13. 设n阶行列式

$$\begin{vmatrix} x+y & xy & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x+y & xy & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x+y \end{vmatrix}$$

的值为________. (2012年北京交通大学)

14. 设A为n阶方阵, 且$|A|=a$, 又$ab\neq 0$. 则$|(bA)^{-1}-cA^*|=$________. (2013年北京交通大学)

15. 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}=\underline{\qquad\qquad}.$$ (2013年北京交通大学)

16. 在6阶行列式中的项$a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$应带有的符号为________. (2010年北京科技大学)

17. $D_5=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35}\\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0\\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{pmatrix}=$________. (2016年北京科技大学)

18. 设A_{ij}是行列式$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 9\\ 2 & 3 & 3 & -2\\ a & b & 1 & c\\ -3 & -4 & -2 & 4 \end{vmatrix}=2013$ 的第i行, 第j列的代数余子式, 则$2A_{14}+3A_{24}+3A_{34}-2A_{44}=$________. (2013年湖南师范大学)

19. 设行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ 1 & 2 & 2 & 2\\ 1 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 5 & 10 & 17 \end{vmatrix}$ 中元素 a_{1j} 的代数余子式为 $A_{1j}(j=1,2,3,4)$, 则 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=$______. (2010年南京大学)

20. 设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, E 是 n 级单位矩阵, 则 $|E+\alpha'\alpha|=$______ . (2010年南京大学)

21. 设 A 为 n 级方阵, E 为 n 级单位矩阵, $A\neq E$, 但 $A^2=E$, 则 $|A+E|=$______ . (2010年南京大学)

22. $D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 0\\ 4 & 8 & 12 & 16\\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式为 $A_{ij}(i,j=1,2,3,4)$, 则 $A_{41}+2A_{42}+3A_{43}+4A_{44}=$______. (2010年南京大学)

23. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n\\ -a_2a_1 & 1-a_2^2 & \cdots & -a_2a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_na_1 & -a_na_2 & \cdots & -a_na_n \end{pmatrix}$, 贝 $|A|=$______. (2010年南京大学)

24. 设 A 是4级方阵, 它的特征值是 $1,2,3,4$. 记 A^* 为 A 的伴随矩阵, 则 $|A^*|=$______. (2012年南京大学)

25. 设行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 中第 i 行第 j 列元素 a_{ij} 的代数余子式为 $A_{ij}(i,j=1,2,3,4)$，则 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=$______. (2010年南京大学)

26. 设 $A=\begin{pmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1+a_n^2 \end{pmatrix}$，则 $|A|=$ ______. (2010年南京大学)

27. 设 A 是 n 阶矩阵, 则 $\begin{vmatrix} A & 2A & 3A \\ 4A & 5A & 6A \\ 7A & 8A & 9A \end{vmatrix}=$ ______. (2009年上海大学)

28. 设 A 为 n 阶方阵, ，且 $|A|=2$, 则 $|A^*A-I|=$______, $|A^*|=$ ______.

二. 选择题

1. 如果2009阶实方阵$A=(a_{ij})$中的元素满足: $i+j=2010$时, a_{ij}是个奇数; $i+j>2010$时, a_{ij}是个偶数, 则行列式$|A|$的值(　). (2009 年北京工业大学)

(A)等于零　　(B)不等于零

(C)不确定　　(D)前三个选项都不正确

2. 如果2009阶实方阵$A=(a_{ij})$中的元素满足: a_{ii}是个奇数$(i=1,2,\cdots,2009)$; $i<j$时, a_{ij} 是个偶数, 则行列式$|A|$ 的值(　). (2010年北京工业大学)

(A)等于零　　(B)不等于零

(C)不确定　　(D)前三个选项都不正确

3. 如果2011阶实方阵$A=(a_{ij})$中的元素满足: $i+j=2012$时, a_{ij}是个奇数; $i+j>2012$时, a_{ij}是个偶数, 则行列式$|A|$的值(　). (2011 年北京工业大学)

(A)等于零　　(B)不等于零

(C)不确定　　(D)前三个选项都不正确

4. a,b,c,d,e,f,g是实数, 行列式$\begin{vmatrix} a & b & b \\ c & d & e \\ f & g & g \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b & b \\ e & c & d \\ f & g & g \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b & b \\ d & e & c \\ f & g & g \end{vmatrix}$的值(　). (2012年北京工业大学)

(A)一定小于零　　(B)等于零

(C)一定大于零　　(D)不确定

5. 已知4阶行列式D的某一行元素及其余子式都为a, 则D等于(　　). (2013年北京科技大学)

(A)0　　(B)a^2

(C)$-a^2$　　(D)4

三.计算题

1. 计算行列式. 各行底数为等差数列, 各行度数也为等差数列, 所有指数都是50

$$\begin{vmatrix} 1^{50} & 2^{50} & 3^{50} & \cdots & 100^{50} \\ 2^{50} & 3^{50} & 4^{50} & \cdots & 101^{50} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 100^{50} & 101^{50} & 102^{50} & \cdots & 199^{50} \end{vmatrix}.$$ (2016年北京大学)

2. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}_{n\times n}$$

(2016年北京理工大学)

3. 计算行列式$D_n = |a_{i,j}|_{n\times n}$, 其中$a_{i,j} = \begin{cases} x, \ i=j; \\ b, \ i<j; \\ c, \ i>j. \end{cases}$ (即$D_n = \begin{vmatrix} x & b & \cdots & b \\ c & x & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & x \end{vmatrix}_{n\times n}$). (2017年北京理工大学)

4. 计算下列行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

(2018年北京理工大学)

5. 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&4&\cdots&n\\1&1&2&3&\cdots&n-1\\1&x&1&2&\cdots&n-2\\1&x&x&1&\cdots&n-3\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x&x&x&\cdots&1\end{vmatrix}$$

(2019年北京理工大学)

6. 设$A=(a_{ij})_{3\times3}$, A_{ij}.的行列式$|A|$中的元素a_{ij}的代数余子式, 且$A_{ij}=a_{ij}$, 又$a_{11}\neq0$, 求$|A|$. (2009年北京交通大学)

7. 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}3&2&0&\cdots&0&0\\1&3&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&3&2\\0&0&0&\cdots&1&3\end{vmatrix}$$的值. (2014年北京交通大学)

8. 计算$n-1$阶行列式$\begin{vmatrix}2^2-2&2^3-2&\cdots&2^{n-1}-2&2^n-2\\3^2-3&3^3-3&\cdots&3^{n-1}-3&3^n-3\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n^2-n&2^3-2&\cdots&n^{n-1}-n&n^n-n\end{vmatrix}$. (2015年北京交通大学)

9. 计算

$$\begin{vmatrix}1+a_1&1&1&\cdots&1&1\\2&2+a_2&2&\cdots&2&2\\3&3&3+a_3&\cdots&3&3\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-1&n-1&n-1&\cdots&n-1+a_{n-1}&n-1\\n&n&n&\cdots&n&n+a_n\end{vmatrix},$$

其中$a_i(i=1,\cdots,n)$均不为0. (2016年北京交通大学)

10. 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}x&y&y&\cdots&y\\z&x&y&\cdots&y\\z&z&x&\cdots&y\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\z&z&z&\cdots&x\end{vmatrix},n\geq2$$

(2017年北京交通大学)

11. 计算下列问题.

(1)$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

(2)设$D = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$, A_{ij}为元素a_{ij}的代数余子式, 计算$\sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{ij}$. (2009年北京科技大学)

12. 计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix},$$

其中$x \neq a_i$, $1 \leq i \leq n$. (2010年北京科技大学)

13. 计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix},$$

其中$a_i \neq 0, (i = 1, 2, \cdots, n)$. (2011年北京科技大学)

14. 计算行列式$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$, 其中$a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$. (2014年北京科技大学)

15. 求n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a+x_1 & a & a & \cdots & a \\ a & a+x_2 & a & \cdots & a \\ a & a & a+x_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a+x_n \end{vmatrix}$$

(2016年北京科技大学)

16. 计算n阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

(2016年北京科技大学)

17. 计算行列式$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & 1 \cdots 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & 1 \cdots 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & 1 \cdots 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 \cdots 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$. (2012年北京师范大学)

18. $g_i(x)$是数域P上的i次多项式, 其首项系数为$i+1(i=0,1,2,\cdots,n-1)$,试计算n阶行列式:

$$\begin{vmatrix} g_0(1) & g_0(2) & \cdots & g_0(n) \\ g_1(1) & g_1(2) & \cdots & g_1(n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{n-1}(1) & g_{n-1}(2) & \cdots & g_{n-1}(n) \end{vmatrix}$$

(2011年大连理工大学)

19. 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & 1-a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 1-a_2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 1-a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & 1-a_n \end{vmatrix}.$$

(2013年大连理工大学)

20. 计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & b_2 & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & b_n & b_n & \cdots & b_n \end{vmatrix},$$ 其中$a_i \neq 0,(i=1,2,\cdots,n)$. (2013年湖南大学)

21. 计算n阶行列式

$$
D_n = \begin{vmatrix}
1+x & z & & & & \\
y & 1+x & z & & & \\
 & y & 1+x & \ddots & & \\
 & & \ddots & \ddots & z & \\
 & & & y & 1+x & z \\
 & & & & y & 1+x
\end{vmatrix},
$$

其中: $x = yz$. (2011年湖南大学)

22. 计算n阶行列式

$$
D_n = \begin{vmatrix}
3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3
\end{vmatrix}.
$$

(2012年湖南大学)

23. 计算n阶行列式

$$
D_n = \begin{vmatrix}
x & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\
1 & x & -1 & \cdots & -1 & -1 \\
1 & 1 & x & \ddots & -1 & -1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
1 & 1 & 1 & \cdots & x & -1 \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & x
\end{vmatrix},
$$

(2013年湖南大学)

24. 证明: $C_n = D_n$, 其中

$$
C_n = \begin{vmatrix}
2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2
\end{vmatrix}, D_n = \begin{vmatrix}
2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2
\end{vmatrix},
$$

并求出C_n的值. (2014年湖南大学)

25. 计算n阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix}
x & y & \cdots & y & y \\
-y & x & \cdots & y & y \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
-y & -y & \cdots & x & y \\
-y & -y & \cdots & -y & x
\end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} -y & -y & \cdots & -y & x \\ -y & -y & \cdots & x & y \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -y & x & \cdots & y & y \\ x & y & \cdots & y & y \end{vmatrix}$. (2015年湖南大学)

26. 计算行列式:

$$D = \begin{vmatrix} a+x_1 & a+x_1^2 & \cdots & a+x_1^n \\ a+x_2 & a+x_2^2 & \cdots & a+x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+x_n & a+x_n^2 & \cdots & a+x_n^n \end{vmatrix}.$$

(2010年湖南师范大学)

27. 计算$n(n \geq 2)$阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}.$$

(2011年湖南师范大学)

28. 计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 & \cdots & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

(2013年湖南师范大学)

29. 计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

(2016年湖南师范大学)

30. 计算行列式:

$$D=\begin{pmatrix} 1&4&6&4&1\\ 1&1&4&6&4\\ 4&1&1&4&6\\ 6&4&1&1&4\\ 4&6&4&1&1 \end{pmatrix}.$$

(2012年华东师范大学)

31. 计算下列行列式的值: (1)

$$\begin{vmatrix} 2&-1&1&2\\ -1&2&-1&0\\ 0&-1&2&-1\\ -1&2&-2&2 \end{vmatrix};$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 1&2&2&2&\cdots&2\\ 2&2&2&2&\cdots&2\\ 2&2&3&2&\cdots&2\\ 2&2&2&4&\cdots&2\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 2&2&2&2&\cdots&n \end{vmatrix}$$

(2013年华东师范大学)

32. 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a^2+m&ba&ca&da\\ ab&b^2+m&cb&db\\ ac&bc&c^2+m&dc\\ ad&bd&cd&d^2+m \end{vmatrix}.$$

(2014年华东师范大学)

33. 求解下面的方程

$$\begin{vmatrix} x_1&x_2\\ x_3&x_1 \end{vmatrix}=1,\begin{vmatrix} x_2&x_3\\ x_1&x_2 \end{vmatrix}=2,\begin{vmatrix} x_3&x_1\\ x_2&x_3 \end{vmatrix}=3.$$

(2015年华东师范大学)

34. 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & \cdots & x_1y_{n-1} & x_1y_n \\ x_1y_2 & x_2y_2 & x_2y_3 & \cdots & x_2y_{n-1} & x_2y_n \\ x_1y_3 & x_2y_3 & x_3y_3 & \cdots & x_3y_{n-1} & x_3y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1y_{n-1} & x_2y_{n-1} & x_3y_{n-1} & \cdots & x_{n-1}y_{n-1} & x_{n-1}y_n \\ x_1y_n & x_2y_n & x_3y_n & \cdots & x_{n-1}y_n & x_ny_n \end{vmatrix}.$$

(2014年华南理工大学)

35. 设ω为任意一个n次单位根, 计算下列$n(n\geq 2)$阶行列式:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \cdots & \omega^{-n+1} \\ \omega^{-n+1} & 1 & \omega^{-1} & \cdots & \omega^{-n+2} \\ \omega^{-n+2} & \omega^{-n+1} & 1 & \cdots & \omega^{-n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega^{-1} & \omega^{-2} & \omega^{-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

(2014年华南理工大学)

36. 设A为n阶方阵, A的$(i,j)-$元素$a_{ij}=|i-j|$, 求行列式$|A|$的值. (2017年华南理工大学)

37. 计算n阶行列式:

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1}+\frac{S}{a_1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1}+\frac{S}{a_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1}+\frac{S}{a_n} \end{vmatrix}.$$

其中$S=\prod_{i=1}^n a_i$. (2019年华南理工大学)

38. 计算如下行列式(空白处为零)

$$\begin{vmatrix} x & & & & a_n \\ -1 & x & & & a_{n-1} \\ & -1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & x & a_2 \\ & & & -1 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

(2009年华中科技大学)

39. 求n阶行列式(空白处为零)

$$\begin{vmatrix} 1-x & x & & & & \\ -1 & 1-x & x & & & \\ & -1 & 1-x & x & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1-x & x \\ & & & & -1 & 1-x \end{vmatrix}$$

的值.(2010年华中科技大学)

40. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ b_1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} \end{vmatrix}$$

(2011年华中科技大学)

41. 已知

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

求D的所有代数余子数之和.(2012年华中科技大学)

42. 设 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ b & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & x \end{vmatrix}$$

(1) 求 D_n

(2) 计算 $\sum^n D_{ni}$，其中 D_{ni} 表示相应元素的代数余子式.(2013年华中科技大学)

43. 设 $a_1, \cdots, a_n$ 是 n 个复数， x 是复变元. 求解: x 取哪些复数值时下述等式 (等式左边是 $n+1$ 阶行列式) 成立:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ x^2 & a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x^n & a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} = 0.$$

(2009年华中师范大学)

44. 计算下列行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2+x_1 & 2+x_1^2 & \cdots & 2+x_1^n \\ 2+x_2 & 2+x_2^2 & \cdots & 2+x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2+x_n & 2+x_n^2 & \cdots & 2+x_n^n \end{vmatrix}.$$

(2011年华中师范大学)

45. 计算行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

(2012年华中师范大学)

46. (1) 设 a_1,a_2,a_3,a_4 是4个数. 计算如下4阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\ a_4 & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}.$$

(2) 设 $D=|a_{ij}|_{n\times n}$ 是一个 n 阶行列式, 且每个 a_{ij} 均为整数. 设 b_{ij} 为 a_{ij} 被 2013 除的余数, 即 $a_{ij}=2013\cdot q_{ij}+b_{ij}$ 这里 q_{ij} 为整数, $0\leqslant b_{ij}<2013, 1\leqslant i,j\leqslant n$. 设 $D_1=|b_{ij}|_{n\times n}$ 是 (i,j) 元为 b_{ij} 的 n 阶行列式. 证明: 2013 整除 $D-D_1$.(2013年华中师范大学)

47. 计算行列式

$$D(x)=\begin{vmatrix} 1+x & x & \cdots & x \\ x & 2+x & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & \cdots & n+x \end{vmatrix}$$

的值.(2014年华中师范大学)

48. 证明 n 阶范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

的值为 $\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$.(2015年华中师范大学)

49. 证明 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & & \\ 1 & a+b & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & ab \\ & & 1 & a+b \end{vmatrix}=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}.$$

其中 a,b 是互不相等的两个数.(2016年华中师范大学)

50. (1) 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ 是 $n-1$ 个 n 维实向量. 设 n 阶行列式 $D=|\beta_1,\cdots,\beta_n|$, 其中 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 是 D 的列向量, 且每个向量 β_i 都是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ 的线性组合. 证明:

$$D=0.$$

(2) 设正整数 $n>2$, 设 $f_1(x),\cdots,f_n(x)$ 是 n 个次数至多为 $n-2$ 的实多项式, 而 $a_1,\cdots,a_n$ 是 n 个实数. 利用 (1) 的结论证明如下行列式

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \ldots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \ldots & f_2(a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \ldots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$$

的值为零.(2017年华中师范大学)

51. 计算下列 $n(n\geqslant 2)$ 阶行列式的值.

(1)

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

(2)

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}.$$

. (2009年兰州大学)

52. 计算下列行列式的值.

(1)

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \ldots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \ldots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix};$$

(2)

$$D_n=\begin{vmatrix} x & b & b & \cdots & b \\ a & x & b & \cdots & b \\ a & a & x & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

(2010年兰州大学)

53. 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 是实矩阵. 证明: 当 $|a_{ii}|>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|,(i=1,2,\cdots,n)$ 时, $|A|\neq 0$.

(2010年兰州大学)

54. 计算下列行列式的值.

(1)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ b & a_2 & b & \cdots & b \\ b & b & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} (a_1+b_1)^{-1} & (a_1+b_2)^{-\lambda} & \dots & (a_1+b_n)^{-1} \\ (a_2+b_1)^{-1} & (a_2+b_2)^{-1} & \dots & (a_2+b_n)^{-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_n+b_1)^{-1} & (a_n+b_2)^{-1} & \cdots & (a_n+b_n)^{-1} \end{pmatrix}.$$

(2012年兰州大学)

55. n 级行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} 2n & n & \cdots & 0 & 0 \\ n & 2n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2n & n \\ 0 & 0 & \cdots & n & 2n \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$, 其中 $a_1a_2\cdots a_n \neq 0$.(2013年兰州大学)

56. 计算行列式的值, 其中 $a \neq b$.

(1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix};$$

(2)

$$\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a \\ b & x_2 & a & \cdots & a \\ b & b & x_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x_n \end{vmatrix}.$$

(2014年兰州大学)

57. 计算下列行列式的值.

(1)

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1+a_1^2 & \cdots & 1+a_1^n \\ 1+a_2 & 1+a_2^2 & \cdots & 1+a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+a_n & 1+a_n^2 & \cdots & 1+a_n^n \end{vmatrix};$$

(2)

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} b & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & b \end{vmatrix}.$$

(2015年兰州大学)

58. 计算下列 n 级行列式的值:

(1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ a & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ a & a & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix};$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

(2016年兰州大学)

59. 计算下列 n 级行列式的值:

(1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix};$$

(2)

$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

(2017年兰州大学)

60. 计算下列 n 级行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix} 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$，其中$a_1a_2\cdots a_n \neq 0$.

(2) $\begin{vmatrix} x_1 & \alpha & \cdots & \alpha \\ \beta & x_2 & \cdots & \alpha \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta & \beta & \cdots & x_n \end{vmatrix}$. (2018年兰州大学)

61. 计算下列 n 阶行列式.

1.

$$\begin{vmatrix} b & \cdots & b & a \\ \vdots & \ddots & \cdot & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ a & b & \cdots & b \end{vmatrix}.$$

2.

$$\begin{vmatrix} x_1^2+1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2+1 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2+1 \end{vmatrix}.$$

(2019年兰州大学)

62. 设 $a_{ij} = \frac{\alpha_i^n-\beta_j^n}{\alpha_i-\beta_j}(i,j=1,2,\cdots,n), n$ 阶方阵 $A=(a_{ij})$，求 A 的行列式 $|A|$.

63. 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 7 \end{vmatrix}.$$

(2010年南京师范大学)

64. 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ -a & -a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x & a \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}.$$

65. (15 分) 设$S_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k, k=0,1,2,\cdots$. 计算行列式$d=\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \cdots & S_{n-2} & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & \cdots & S_{n-1} & S_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ S_{n-2} & S_{n-1} & \cdots & S_{2n-4} & S_{2n-3} \\ S_{n-1} & S_n & \cdots & S_{2n-3} & S_{2n-2} \end{vmatrix}$.

(2012年南京师范大学)

66. (15 分) 设$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为n 个实数, 令$s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k$. 计算行列式:

$$D=\begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \cdots & S_n \\ S_2 & S_3 & \cdots & S_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_n & S_{n+1} & \cdots & S_{2n-1} \end{vmatrix}.$$

(2013年南京师范大学)

67. (20 分) 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, 多项式$g(x)=x^{2012}+x-1$, 计算矩阵$g(A)$ 的行列式. (2013年南京师范大学)

68. (15 分) 设n 级实矩阵$A=(a_{ij})$ 满足$|A|=1$ 且$a_{ij}+a_{ji}=0, i,j=1,2,\cdots,n$, 对任意非零实数$b$, 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}+b & a_{12}+b & \cdots & a_{1n}+b \\ a_{21}+b & a_{22}+b & \cdots & a_{2n}+b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b & a_{n2}+b & \cdots & a_{nn}+b \end{vmatrix}.$$

(2014年南京师范大学)

69. 叙述克拉默法则并证明. (2018年南京师范大学)

70. 试求下列行列式的值

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & 5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}.$$

(2007年南开大学)

71. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为数域 P 上的 n 阶方阵, 定义 $P^{n\times n}$ 上的线性变换 T, 使 $T(X)=AX, X\in P^{n\times n}$, 求 T 的迹和行列式. (2008年南开大学)

72. 计算下列行列式的值:

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

(2010年南开大学)

73. (20 分)设n 级行列式$d=\det\left((a_{ij})_{n\times n}\right)\neq 0, A_{ij}$ 为a_{ij} 在d 中的代数余子式, 试求行列式

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1,n-1} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n-1,\lambda} & A_{n-1,2} & \cdots & A_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

的值. (2012年南开大学)

74. 设 n 阶行列式

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=1$$

且满足 $a_{ij}=-a_{ji}, i,j=1,2,\cdots,n$. 对任意 x, 求 n 阶行列式

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{pmatrix}.$$

(2014年南开大学)

75. 已知 n 阶行列式

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}.$$

求 $A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}$ 的值. (2016年南开大学)

76. 计算 n 级行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

(2017年南开大学)

77. 已知 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$, 求行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}.$$

(2018年南开大学)

78. (20 分) 若整数$n\geq 3$, 计算下列n 阶行列式.

(1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(2)

$$\begin{vmatrix} \cos 1 & \cos 2 & \cdots & \cos n \\ \cos(n+1) & \cos(n+2) & \cdots & \cos 2n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos\left(n^2-n+1\right) & \cos\left(n^2-n+2\right) & \cdots & \cos n^2 \end{vmatrix}.$$

(2019年南开大学)

79. 求

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & a \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

. (2019年上海大学)

80. 求

$$\begin{vmatrix} a_1+x_1+1 & a_1+x_2 & \cdots & a_1+x_n \\ a_2+x_1 & a_2+x_2+1 & \cdots & a_2+x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+x_1 & a_n+x_2 & \cdots & a_n+x_n+1 \end{vmatrix}$$

(2012年上海大学)

81. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a+x_1 & a+x_1^2 & \cdots & a+x_1^{n-1} & a+x_1^n \\ a+x_2 & a+x_2^2 & \cdots & a+x_2^{n-1} & a+x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a+x_n & a+x_n^2 & \cdots & a+x_n^{n-1} & a+x_n^n \end{vmatrix}$$

(2015年上海大学)

82. (20 分) 计算行列式

(1) $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & \dots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & \dots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & \dots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$

(2) $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & 1+a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \dots & 1+a_n+b_n \end{vmatrix}$ (2010年上海交通大学)

83. (20 分) 计算行列式

(1) $\begin{vmatrix} 1+\sin(2\theta_1) & \sin(\theta_1+\theta_2) & \dots & \sin(\theta_1+\theta_n) \\ \sin(\theta_2+\theta_1) & 1+\sin(2\theta_2) & \dots & \sin(\theta_2+\theta_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin(\theta_n+\theta_2) & \sin(\theta_n+\theta_2) & \dots & 1+\sin(2\theta_n) \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 2a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 2a_{n-1} & 2a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2a_2 & 2a_3 & 2a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$ (2011年上海交通大学)

84. 计算下列行列式的值.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

(2014年上海交通大学)

85. 计算 $n(n>1)$ 阶行列式的值:

$$\begin{vmatrix} n & S_1 & S_2 & \cdots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \\ S_2 & S_3 & S_4 & \cdots & S_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{n-1} & S_n & S_{n+1} & \cdots & S_{2n-2} \end{vmatrix},$$

其中 $S_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$. (2015年上海交通大学)

86. 计算下列行列式的值。

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \sin(2a) & \sin(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\gamma) \\ \sin(\beta+\alpha) & \sin(2\beta) & \sin(\beta+\gamma) \\ \sin(\gamma+\alpha) & \sin(\gamma+\beta) & \sin(2\gamma) \end{vmatrix}$$

(2016年上海交通大学)

87. 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

其中 $a_i \neq 0, 1 \leq i \leq n$. (2009年首都师范大学)

88. 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d \\ c & b & a & d \\ b & d & c & a \end{vmatrix}$$

(2010年首都师范大学)

89. 设方阵 A 的特征多项式为 $f(\lambda) = (\lambda \to 1)^2(\lambda+1)$, 求矩阵

$$B = A^3 + 2A^2 + 3A$$

的行列式. (2010年首都师范大学)

90. 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2+a_2 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & 1+a_{n-1} & n \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & 1+a_n \end{vmatrix}$$

其中每一个 $a_i \neq 0$, 若有 $a_i = 0$ 讨论结论. (2011年首都师范大学)

91. (15 分) 求下面行列式的值(其中每个$a_i \neq 1$)

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 1+a_2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 1+a_3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

(2013年首都师范大学)

92. 求行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$$

(2014年首都师范大学)

93. 求行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

(2015年首都师范大学)

94. 求行列式

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ac & ad & bc & bd \\ ac & bc & ad & bd \\ c^2 & cd & cd & d^2 \end{vmatrix}$$

(2016年首都师范大学)

95. 求行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{8} & \frac{1}{10} \end{vmatrix}$$

(2017年首都师范大学)

96. 设A是数域F上的n阶方阵，秩为r.设$A^2 = A$ 求行列式$det(A-3I_n)$，其中I_n 是n阶单位阵. (2016年四川大学)

97. 设n阶行列式D_n 的所有元素的代数余子式之和，其中

$$D_n = \begin{vmatrix} 33 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 61 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

(2013年武汉大学)

98. 计算

$$D = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix},$$

其中$s_k = x_1^k + s_2^k + \cdots + x_n^k$.(2013年武汉大学)

99. 叙述Cramer法则并用矩阵方法加以证明解释. (2010年湘潭大学)

100. 求n阶矩阵A的行列式和秩，这里

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix},$$

其中$x_i \neq 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$ 互不相同.

(2011年湘潭大学)

101. 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x+y & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & x+y & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & x+y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & x+y \end{vmatrix}, n \geq 1.$$

(2012年湘潭大学)

102. 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a & a \\ b & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & x & a \\ b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix}.$$

(2013年湘潭大学)

103. 令n阶行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}0&1&\cdots&1&1\\1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&0&\cdots&n-1&0\\1&0&\cdots&0&n\end{vmatrix},n\geq 2,$$

求$\sum\limits_{j=1}^{n}A_{1j}$，其中$A_{1j}$ 为行列式$|A|$ 中元素a_{1j} 的代数余子式.

.(2015年湘潭大学)

104. 设矩阵$A=(a_{ij})$ 为数域P上的n阶矩阵，其中$a_{ij}=a_i-b_j$，求A的行列式与特征多项式. (2018年湘潭大学)

105. 设4阶方阵$A=(\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4),B=(\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，其中$\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 均为4维列向量，且$|A|=4$ 求$|A+B|$.(2010年云南大学)

106. 设4阶行列式$A=\begin{vmatrix}3&-5&2&d\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^4&b^4&c^4&d^4\end{vmatrix}$，计算$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$，其中$A_{ij}$ 是元素a_{ij} 的代数余子式. (2010年云南大学)

107. 设

$$f(x)=\begin{vmatrix}3x&x&1&2\\-1&x&1&-1\\4&-2&x&1\\1&3&-1&-x\end{vmatrix}.$$

求$f(x)$ 中x^4,x^3 的系数. (2011年云南大学)

108. 如果n级排列$x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 的逆序数为k，求n级排列$x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数. (2011年云南大学)

109. 已知3阶方阵A的特征值为$1,-1,2$，求3阶矩阵$B=A^3-2A^2$ 所有的特征值和$|B|$. (2011年云南大学)

110. 计算行列式

$$\begin{vmatrix}x+1&x&x&\cdots&x\\x&x+2&x&\cdots&x\\x+1&x&x+4&\cdots&x\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x&x&x&\cdots&x+2^n\end{vmatrix}.$$

(2011年云南大学)

111. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 都是4维列向量.如果行列式$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|=m,|\alpha_1,\beta_2,\alpha_3,\alpha_2|=n$，求4阶行列式$|\alpha_1,\alpha_3,\alpha_2,\beta_1+\beta_2|$. (2012年云南大学)

112. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} -x^4 & -x^4 & -x^4 & -x^4 \\ -x^3 & -x^3 & -x^3 & 4x^3 \\ -x^2 & -x^2 & 4x^2 & -x^2 \\ -x & 4x & -x & -x \end{vmatrix}.$$

(2012年云南大学)

113. 求解 $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & x-2 & -1 \\ 0 & x & x-2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = 0.$ (2013年云南大学)

114. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} \sin(\alpha_1+\alpha_1) & \sin(\alpha_1+\alpha_2) & \cdots & \sin(\alpha_1+\alpha_n) \\ \sin(\alpha_2+\alpha_1) & \sin(\alpha_2+\alpha_2) & \cdots & \sin(\alpha_2+\alpha_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin(\alpha_n+\alpha_1) & \sin(\alpha_n+\alpha_2) & \cdots & \sin(\alpha_n+\alpha_n) \end{vmatrix}.$$

(2013年云南大学)

115. 求解 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ x & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0.$ (2014年云南大学)

116. 设A是n阶实对称矩阵，且A的主对角线上的元素之和等于正整数N，求$|E+2A|$ 的最大值. (2014年云南大学)

117. 设A, B 是正交变换，$|A|+|B|=0$ ，则$|A+B|=0$.(2016年云南大学)

118. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1-2 & \alpha_2-2 & \alpha_3-2 & \cdots & \alpha_n-2 \\ \alpha_1^2-3\alpha_1 & \alpha_2^2-3\alpha_2 & \alpha_3^2-3\alpha_3 & \cdots & \alpha_n^2-3\alpha_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1}-n\alpha_1^{n-2} & \alpha_2^{n-1}-n\alpha_2^{n-2} & \alpha_3^{n-1}-n\alpha_3^{n-2} & \cdots & \alpha_n^{n-1}-n\alpha_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

(2017年云南大学)

119. 设$n>2$，求

$$det \begin{pmatrix} 0 & & & & a_0 \\ -1 & 0 & & & a_1 \\ & -1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ & & & -1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

(2010年中科大)

120. 求行列式$det\begin{pmatrix}-I_n & 2I_n\\ 3I_n & 4I_n\end{pmatrix}$，其中$I_n$ 表示n阶单位矩阵. (2015年中科大)

121. 考虑分块矩阵$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 以及$B=(2\beta_3,\beta_2,-\beta_1)$.若$detA=2$，求$detB$. (2016年中科大)

122. 设n阶方阵$A_n=(|i-j|)_{1\le i,j\le n}$,其行列式记为D_n .试证明

$$D_n+4D_{n-1}+4D_{n-2}=0,$$

并求出行列式D_n .(2011年国科大)

123. 求下面行列式的值:

$$D_n=\begin{vmatrix}a_1^2 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1\\ a_2a_1+1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n+1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_na_1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2\end{vmatrix}.$$

其中,$s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k$. (2013年国科大)

124. 已知$c^2-4ab\neq 0$,计算行列式

$$\begin{vmatrix}c & a & & & \\ b & c & a & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b & c & a\\ & & & b & c\end{vmatrix}.$$

(2014年国科大)

125. 设$a_i+b_j\neq 0$,求以下矩阵的行列式值:

$$A=\begin{pmatrix}(a_1+b_1)^{-1} & (a_1+b_2)^{-1} & \cdots & (a_1+b_n)^{-1}\\ (a_2+b_1)^{-1} & (a_2+b_2)^{-1} & \cdots & (a_2+b_n)^{-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (a_n+b_1)^{-1} & (a_n+b_2)^{-1} & \cdots & (a_n+b_n)^{-1}\end{pmatrix}.$$

(2016年国科大)

126. 求

$$\begin{vmatrix}1-a_1 & a_2 & & & \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a_n\\ & & & -1 & 1-a_n\end{vmatrix}.$$

(2017年国科大)

127. 设n阶方阵$M_n = (|i-j|)_{1\le i,j\le n}$,令$D_n = det(M_n)$ (M_n的行列式)

(1)计算D_4 .

(2)证明D_n 满足递推关系$D_n = -4D_{n-1} - 4D_{n-2}$.

(3)求n阶方阵$A_n = (|\frac{1}{i} - \frac{1}{j}|)_{1\le i,j\le n}$ 的行列式$det(A_n)$. (2018年国科大)

128. 设$a, b, p_1, p_2, \cdots, p_n \in \mathbb{R}, a \neq b$.求行列式

$$D = \begin{vmatrix} p_1 & a & \cdots & a \\ b & p_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & p_n \end{vmatrix}$$

的值. (2010年中南大学)

129. 计算n阶$(n \ge 1)$ 行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & a & \cdots & a \\ b & \alpha & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ b & \beta & \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ b & \beta & \beta & \alpha & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & \beta & \beta & \beta & \cdots & \alpha \end{vmatrix}.$$

(2012年中南大学)

130. 计算n阶$(n \ge 2)$行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \\ 1 & C_2^1 & 0 & \cdots & 0 & k^2 \\ 1 & C_3^1 & C_3^2 & \cdots & 0 & k^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \cdots & C_{n-1}^{n-2} & k^{n-1} \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & \cdots & C_n^{n-2} & k^n \end{vmatrix},$$

其中k为正整数. (2013年中南大学)

131. 设$n(n>2)$ 阶行列式$D = |a_{ij}|$ 的每个元素都是实数,且至少有一个不为零.当D的每个元素都等于它自己的代数余子式时,求D的值. (2014年中南大学)

132. 设A是一个n阶实方阵,且$r(A) \ge 1$.若$|A|$ 的每个元素都等于它自己的代数余子式.证明:$|A|$ 的每行,每列都至少有一个元素不为零. (2016年中南大学)

133. 设A是n阶方阵,它的所有对角元都等于2,当$|i-j| = 1$ 时,$a_{ij} = -1$,其它元都是0,求A的行列式值. (2010年中山大学)

134. 求下列n阶实矩阵的行列式:

(1)$A=(a_{ij})$,其中$a_{ij}=\begin{cases}1, & i\neq 1, j=1 \quad or \quad i=1, j\neq 1;\\ 2, & i=j;\\ 0, & else.\end{cases}$

(2)$B=(b_{ij})$,其中$b_{ij}=f_j(a_i), f_j(x)$ 为首一的$j-1$ 次实系数多项式,$a_1,\cdots,a_n$ 为两两不同的实数. (2015年中山大学)

135. 设$A\in M_n(F),\alpha,\beta\in F^{n\times 1}$.证明:$det(A+\alpha\beta^T)=detA+\beta^T adj(A)\alpha$,这里$adj(A)$ 表示矩阵A的伴随矩阵. (2016年中山大学)

136. 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} t+1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2t+1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & nt+1\end{pmatrix}.$$

求A的行列式,并指出t取何值时A正定. (2018年中山大学)

四.证明题

1. 证明

$$det\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2011\\ 2^2 & 3^2 & \cdots & 2012^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 2011^{2011} & 2012^{2011} & \cdots & 4021^{2011}\end{pmatrix}\neq 0. \text{ (2012年北京大学)}$$

2. $\mathbb{F}$为数域, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$是$\mathbb{F}^n$中的$2n$个列向量. 用$|\alpha_1,\cdots,\alpha_n|$表示以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为列向量的矩阵的行列式. 证明下面的行列式等式

$$|\alpha_1,\cdots,\alpha_n|\cdot|\beta_1,\cdots,\beta_n|=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\beta_i,\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_n|\cdot|\alpha_i,\beta_2,\cdots,\beta_n|$$

(2017年北京大学)

3. 试确定实数域上所有的3阶$(0,1)$行列式(即所有元素只能是$0,1$的行列式)的最大值, 给出证明及取到最大值的一个构造. (2018年北京大学)

4. 对实矩阵$(a_{ij})_{m\times n}$, $(b_{ij})_{n\times p}$定义运算$\otimes$如下:

$$(a_{ij})_{m\times n}\otimes(b_{ij})_{n\times p}=(c_{ij})_{m\times p}$$

其中$c_{ij}=\sum\limits_{s+l=n+1,1\leq s,l\leq n}a_{is}b_{lj}$.

证明: 如果A,B是n阶实方阵, 则行列式$|A\otimes B|=(-1)^{\binom{n}{2}}|A||B|$, 其中$\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$. (提示: 若$M_1,M_2$是实$m_1,m_2$ 阶方阵, C是$m_2\times m_1$实方阵, 则行列式$\begin{vmatrix} M_1 & 0\\ C & M_2\end{vmatrix}=|M_1||M_2|$.) (2010年北京工业大学)

5. 用行列式, 秩, 线性相关等知识证明: 若由数字$0,1$构成的$n(n\geq 2)$ 阶方阵A的任意两行都不相同, 则必可去掉其某一列, 使得剩下的$n\times(n-1)$型矩阵的任意两行仍然不相同. (2011年北京工业大学)

6. 对给定的元素不全为零的实数列$r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots$, 定义实矩阵$(a_{ij})_{m\times n}$, $(b_{ij})_{n\times p}$ 之间的一种加权乘法$\otimes$:

$$(a_{ij})_{m\times n}\otimes(b_{ij})_{n\times p}=(c_{ij})_{m\times p}$$

其中$c_{ij}=\sum\limits_{k=1} a_{ik}r_kb_{kj}$. 证明: 如果$A,B$是$n$阶实方阵, 则行列式$|A\otimes B|=|A||B|(\prod\limits_{k=1}^{n} r_k)$, 其中$\prod\limits_{k=1}^{n} r_k=r_1r_2\cdots r_n$. (显然当$r_k=1(k=1,2,\cdots)$时, 此结论便成了普通的行列式的乘法公式) (2011年北京工业大学)

7. 设$f_{ij}(x)$为实连续函数(简记为f_{ij}), $D(x)=|f_{ij}|$为n阶行列式, 证明: $D(x)$的导数

$$D^{'}(x)=\sum_{j=1}^{n}\begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1j}^{'} & \cdots & f_{1n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ f_{n1} & \cdots & f_{nj}^{'} & \cdots & f_{nn}\end{pmatrix}$$

, 这里$f_{ij}^{'}$是f_{ij}的导数. (2011年北京交通大学)

8. 证明下面的行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & c_2^1 & \cdots & c_{n-1}^1 & c_n^1\\ 1 & c_3^2 & \cdots & c_n^2 & c_{n+1}^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & c_n^{n-1} & \cdots & c_{2n-3}^{n-1} & c_{2n-1}^{n-1}\end{vmatrix}=1,$$

其中c_i^k表示组合数. (2009年大连理工大学)

9. 设$f_n(x)=\begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -1 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -1 & x & -1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x\end{pmatrix}$.

(1)证明: $f_1(x)=x,f_2(x)=x^2-1,f_n(x)=xf_{n-1}(x)-f_{n-2}(x),(n>2)$;

(2)求$f_n(2)$的值;

(3)证明: $f_n(x)=0$的根是绝对值不超过2的实数. (2015年华东师范大学)

10. 设$f(x)=a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1},\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1}$为全部$n$次单位根, 证明:

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & a_1 \end{vmatrix}=\prod_{i=0}^{n-1} f(\varepsilon_i).$$

(2016年华南理工大学)

11. 证明

$$\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}|A|^{n-2}$$

$A=(a_{ij})_{n\times n}$, A_{ij} 为 A 的代数余子式(2015 年华中科技大学)

12.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & 1 \end{vmatrix}$$

把 D 的第 j 行换为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},1$ 得 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$, 证明: $D=D_1+D_2+\cdots+D_n$ (2016年华中科技大学)

13. 已知 α 和 β 为 n 维列向量, 试证明:

$$|E+\alpha\beta'|=1+\alpha'\beta$$

.(2019年华中科技大学)

14. 设 A_{ij} 是 n 级矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的元素 a_{ij} 的代数余子式. 证明:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & z \end{vmatrix}=|A|z-\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}x_iy_j.$$

(2) 计算 n 级行列式 $\begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 9 \end{vmatrix}$ (2011年兰州大学)

15. (10 分) 设$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, A_{ij}为a_{ij}的代数余子式, $1\leqslant i,j\leqslant n$.

证明：如果 D 的某行的元素全为 1, 则 $D=\sum\limits_{1\leq i,j\leq n} A_{ij}$.

16. (10 分) 设n 级实矩阵$A=(a_{ij})$ 满足: 对任意的$1\leqslant i,j\leqslant n$ 且$i\neq j$, 不等式$|a_{ii}a_{jj}|>\left(\sum\limits_{k\neq i}|a_{ik}|\right)\left(\sum\limits_{t\neq j}|a_{jt}|\right)$ 成立. 证明: $|A|\neq 0$. (2011年南京师范大学)

17. 设行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, $n\geqslant 3$, 令 A_{ij} 表示元素 a_{ij} 的代数余子式, $1\leqslant i,j\leqslant n$ 证明:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1,n-1} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & \cdots & A_{n-1,n-1} \end{vmatrix}=a_{nn}D^{n-2}$$

(2015 年南京师范大学)

18. 证明: 如果一个球面的球心坐标 (x_0,y_0,z_0) 中至少有一个是无理数, 则此球面上任何四个不在同一平面上的点中至多有三个点使其坐标都是有理数.

19. 设 P 为数域, $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 $P^{n\times n}$ 中的可逆矩阵, 已知 $c_i\in P, i=1,2,\cdots,n$, 且记 $A^{-1}=B=(b_{ij})_{n\times n}$, $d_i=\sum_{j=1}^n b_{ij}c_j, i=1,2,\cdots,n$, 令 $D=(a_{ij}+c_ic_j)_{n\times n}$, 证明

$$\det D=\det A\cdot\left(1+\sum_{i=1}^n c_id_i\right).$$

(2016年南开大学)

20. 设矩阵 $A=[\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n]$, $\operatorname{rank}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=1$, 且 $\alpha_i,\beta_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 n 维列向量.

(1) 求证:

$$|A|=|(\beta_1,\cdots,\beta_n)|+\sum_{i=1}^n|(\beta_1,\cdots,\beta_{i-1},\alpha_i,\beta_{i+1},\cdots,\beta_n)|$$

(2) 利用(1) 计算行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a \\ a & x_2 & a & \cdots & a \\ a & a & x_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

(2010年上海大学)

21. (20 分) (1) 设$X, Y \in \mathbb{F}^n, A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 求证.

$$\det\left(A+XY^T\right)=\det A+Y^TA^*X$$

(2) 利用(1) 的结论证明：如果 n 阶矩阵 A 的行列式为 $1, \det(A+J)=2$, 其中 J 为 n 阶矩阵, 且矩阵中元素都是1，则 A^* 所有元素之和为1. (2011年上海大学)

22. 设 A 是 n 阶方阵, $n \geq 3$, 试证明:

$$(A^*)^*=|A|^{n-2}A.$$

(2012年上海大学)

23. (15 分) 证明行列式

$$A=\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ac & ad & bc & bd \\ ac & bc & ad & bd \\ c^2 & cd & cd & d^2 \end{vmatrix}=(ad-bc)^4.$$

(2012年首都师范大学)

24. 设 A 为 n 阶实方阵, 它的每行各数的和都等于 2, 证明:

$$\det(A-2E)=0$$

($\det(A-2E)=|A-2E|$, 即行列式.) (2013年首都师范大学)

25. 设$A=(a_{ij})$ 是n阶复矩阵.令$Re(A)=(b_{ij})$ 是n阶实矩阵，其中b_{ij} 是a_{ij} 的实部；令$Im(A)=(c_{ij})$，其中c_{ij} 是a_{ij} 的虚部，$1 \leq i, j \leq n$.令

$$B=\begin{pmatrix} Re(A) & -Im(A) \\ Im(A) & Re(A) \end{pmatrix}.$$

证明：$det(B)=|det(A)|^2$，这里，det表示行列式，$|\cdot|$ 表示复数的模. (2013年四川大学)

26. 设V是n阶实矩阵，且$\forall \alpha(\neq 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ 均有$\alpha^TA\alpha>0$，求证：$detA>0$.(2011年武汉大学)

27. 设A为实对称正定方阵，则

$$det(A) \leq a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

等号成立当且仅当A为对角阵时成立. (2012年武汉大学)

28. 令$A=(a_{ij})$ 为$n(n \geq 2)$ 阶方阵，A^* 为A的伴随矩阵，证明：

（1）如果$|A|=0$，则$r(A^*)=1$ 或0.

（2）令M表示划掉A^* 的第i列和第i行所得到的$n-1$ 阶子式，则$M=a_{ii}|A|^{n-2}$

29. 设E是n阶单位矩阵，$M=\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ ，矩阵A满足$A^TMA=M$ ，证明A的行列式等于1. (2012年浙江大学)

30. 设n阶正交方阵A和B满足$dttA=-detB$.试证明：$dte(A+B)=0$. (2016年中科大)

31. 设A,B 分别是$n\times m$ 和$m\times n$ 矩阵，I_k 是k阶单位矩阵.

(1)求证:$|I_n-AB|=|I_m-BA|$ (2014年湘潭大学)

.

(2)计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix}.$$

(2010年国科大)

32. 设A,B,C,D 均为n阶方阵,且$AC=CA$.证明:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|AD-CB|.$$

(2010年中南大学)

33. 证明以下结论:

(1)设n阶实矩阵$A=(a_{ij})$ 正定,证明$|A|\le a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

(2)设B,D 分别为n阶m阶实方阵,且实矩阵$H=\begin{pmatrix} B & C \\ C' & D \end{pmatrix}$ 正定,证明$|H|\le|B|\cdot|D|$.(2018年中山大学)