第二届全国大学生数学竞赛预赛试卷

（数学类，2010）

专业：____ 年级：____ 所在院校：____ 身份证号：____ 姓名：____

密 —— 封 —— 线

考试形式：<u>闭卷</u>　　考试时间：<u>150</u> 分钟　　满分：<u>100</u> 分.

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
满　分	10	15	10	10	15	20	10	10	100
得　分									

注意：1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边，写在其它纸上一律无效.

2、密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记.

3、如当题空白不够，可写在当页背面，并标明题号.

得　分	
评阅人	

一、（本题共 10 分）设 $\varepsilon \in (0,1)$，$x_0 = a$，$x_{n+1} = a + \varepsilon \sin x_n$ $(n = 0,1,2\cdots)$. 证明 $\xi = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在，且 ξ 为方程 $x - \varepsilon \sin x = a$ 的唯一根.

得　分	
评阅人	

二、（本题共 15 分）设 $B = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 30 \\ 0 & 0 & 2010 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 证明 $X^2 = B$ 无解，这里 X 为三阶未知复方阵.

得　分	
评阅人	

三、（本题共 10 分）设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是凸区域，函数 $f(x,y)$ 是凸函数. 证明或否定：$f(x,y)$ 在 D 上连续.

注：函数 $f(x,y)$ 为凸函数的定义是 $\forall\alpha\in(0,1)$ 以及 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D$，成立 $f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2,\alpha y_1+(1-\alpha)y_2)\le\alpha f(x_1,y_1)+(1-\alpha)f(x_2,y_2)$.

专业：______ 年级：______ 所在院校：______ 身份证号：______ 姓名：______

线 封 密

得　分	
评阅人	

四、（本题共 10 分） 设 $f(x)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上 Riemann 可积，在 $x=1$ 可导， $f(1)=0$， $f'(1)=a$． 证明： $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\int_0^1 x^n f(x)dx=-a.$

得　分	
评阅人	

五、（本题共 15 分）已知二次曲面 Σ（非退化）过以下九点：$A(1,0,0),\ B(1,1,2),\ C(1,-1,-2),\ D(3,0,0),\ E(3,1,2),\ F(3,-2,-4),$ $G(0,1,4),\ H(3,-1,-2),\ I(5,2\sqrt{2},8)$. 问 Σ 是哪一类曲面？

得　分	
评阅人	

六、（本题共 20 分） 设 A 为 $n\times n$ 实矩阵（未必对称），对任一 n 维实向量 $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\alpha A\alpha^{\mathrm{T}}\geq 0$（这里 α^{T} 表示 α 的转置），且存在 n 维实向量 β 使得 $\beta A\beta^{\mathrm{T}}=0$．同时对任意 n 维实向量 x 和 y，当 $xAy^{\mathrm{T}}\neq 0$ 时有 $xAy^{\mathrm{T}}+yAx^{\mathrm{T}}\neq 0$．证明：对任意 n 维实向量 v，都有 $vA\beta^{\mathrm{T}}=0$.

姓名：________ 身份证号：________ 所在院校：________ 年级：________ 专业：________

密　　封　　线

得　分	
评阅人	

七、(本题共 10 分)　设 f 在区间 $[0,1]$ 上 Riemann 可积，$0 \le f \le 1$. 求证：对任何 $\varepsilon > 0$，存在只取值为 0 和 1 的分段（段数有限）常值函数 $g(x)$，使得 $\forall [\alpha,\beta] \subseteq [0,1]$，$\left|\int_{\alpha}^{\beta} \big(f(x)-g(x)\big)dx\right| < \varepsilon.$

得 分	
评阅人	

八、(10 分) 已知 $\varphi:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 是一个严格单调下降的连续函数，满足 $\lim\limits_{t\to 0^+}\varphi(t)=+\infty$，且 $\int_0^{+\infty}\varphi(t)dt=\int_0^{+\infty}\varphi^{-1}(t)dt=a<+\infty$，其中 φ^{-1} 表示 φ 的反函数.

求证： $\int_0^{+\infty}\left[\varphi(t)\right]^2dt+\int_0^{+\infty}\left[\varphi^{-1}(t)\right]^2dt\geq\frac{1}{2}a^{\frac{3}{2}}$.