第三届全国大学生数学竞赛预赛试卷

（非数学类　2011）

一、(本大题共 4 小题，每小题 6 分，共 24 分)

计算下列各题(要求写出重要步骤)

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-\mathrm{e}^2(1-\ln(1+x))}{x}$.

(2) 设$a_n=\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2^2}\cdots\cos\dfrac{\theta}{2^n}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

(3) 求$\iint\limits_D \operatorname{sgn}(xy-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D=\{(x,y)\,|0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 2\}$.

(4) 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$的和函数，并求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^{2n-1}}$的和。

二、(本题共 16 分) 设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为数列，a,λ 为有限数，求证:

(1) 如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

(2) 如果存在正整数 p，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p}$.

三、(本题共 15 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有连续的三阶导数，且 $f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$. 求证: 在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 x_0，使得 $f'''(x_0)=3$.

四、(本题共 15 分) 在平面上，有一条从点 $(a,0)$ 向右的射线，其线密度为 ρ，在点 $(0,h)$ 处 (其中 $h>0$)有一质量为 m 的质点，求射线对该质点的引力。

五、(本题共 15 分) 设 $z=z(x,y)$ 是由方程

$$F\left(z+\frac{1}{x},\ z-\frac{1}{y}\right)=0$$

确定的隐函数，且具有连续的二阶偏导数，求证:

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=0\ \text{ 和 }\ x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x+y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

六、(本题共 15 分) 设函数 $f(x)$ 连续，$a,\ b,\ c$ 为常数，

Σ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$，记第一型曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}f(ax+by+cz)\mathrm{d}S.\quad \text{求证：}\ I=2\pi\int_{-1}^{1}f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u)\mathrm{d}u.$$