

第二届中国大学生数学竞赛预赛试卷

参考答案及评分标准

(非数学类, 2010)

一(本题共5小题, 每小题5分, 共25分)、计算下列各题(要求写出重要步骤).

(1) 设 $x_n = (1+a) \cdot (1+a^2) \cdots (1+a^{2^n})$, 其中 $|a| < 1$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解 将 x_n 恒等变形

$$\begin{aligned} x_n &= (1-a)(1+a) \cdot (1+a^2) \cdots (1+a^{2^n}) \frac{1}{1-a} = (1-a^2) \cdot (1+a^2) \cdots (1+a^{2^n}) \frac{1}{1-a} \\ &= (1-a^4) \cdot (1+a^4) \cdots (1+a^{2^n}) \frac{1}{1-a} = \frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}, \end{aligned}$$

由于 $|a| < 1$, 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{2^n} = 0$, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{1-a}.$$

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x e^{-1} \right]^x \\ &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - 1 \right] x \right) = \exp \left(\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 \right] \right) \\ &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) - 1 \right] \right) = e^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

(3) 设 $s > 0$, 求 $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-sx} x^n dx$ ($n=1, 2, \dots$).

解 因为 $s > 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-sx} x^n = 0$, 所以,

$$I_n = -\frac{1}{s} \int_0^{+\infty} x^n de^{-sx} = -\frac{1}{s} \left[x^n e^{-sx} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-sx} dx^n \right] = \frac{n}{s} I_{n-1}$$

$$\text{由此得到, } I_n = \frac{n}{s} I_{n-1} = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} I_{n-2} = \cdots = \frac{n!}{s^n} I_0 = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

(4) 设函数 $f(t)$ 有二阶连续的导数, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $g(x, y) = f\left(\frac{1}{r}\right)$, 求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

解 因为 $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$, 所以

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{x}{r^3} f'\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^6} f''\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{2x^2 - y^2}{r^5} f'\left(\frac{1}{r}\right).$$

利用对称性, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{1}{r^4} f''\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r^3} f'\left(\frac{1}{r}\right)$

(5) 求直线 $l_1: \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 与直线 $l_2: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$ 的距离.

解 直线 l_1 的对称式方程为 $l_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$. 记两直线的方向向量分别为

$$\vec{l}_1 = (1, 1, 0), \quad \vec{l}_2 = (4, -2, -1),$$

两直线上的定点分别为 $P_1(0, 0, 0)$ 和 $P_2(2, 1, 3)$,

$$\vec{a} = \overrightarrow{P_1 P_2} = (2, 1, 3).$$

$\vec{l}_1 \times \vec{l}_2 = (-1, 1, -6)$. 由向量的性质可知, 两直线的距离

$$d = \left| \frac{\vec{a} \cdot (\vec{l}_1 \times \vec{l}_2)}{|\vec{l}_1 \times \vec{l}_2|} \right| = \frac{|-2 + 1 - 18|}{\sqrt{1 + 1 + 36}} = \frac{19}{\sqrt{38}} = \sqrt{\frac{19}{2}}$$

二 (本题共 15 分)、 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有二阶导数, 并且

$$f''(x) > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \alpha > 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \beta < 0, \quad \text{且存在一点 } x_0, \text{ 使得 } f(x_0) < 0.$$

证明: 方程 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 恰有两个实根.

证 1. 由 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \beta < 0$ 必有一个充分大的 $a > x_0$, 使得 $f'(a) > 0$.

$$f''(x) > 0 \text{ 知 } y = f(x) \text{ 是凹函数, 从而 } f(x) > f(a) + f'(a)(x-a) \quad (x > a)$$

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(+\infty) + f'(a)(x-a) \rightarrow +\infty$.

故存在 $b > a$, 使得

$$f(b) > f(a) + f'(a)(b-a) > 0 \quad \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

同样, 由 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \beta < 0$, 必有 $c < x_0$, 使得 $f'(c) < 0$.

$f''(x) > 0$ 知 $y = f(x)$ 是凹函数, 从而 $f(x) > f(c) + f'(c)(x - c)$ ($x < c$)

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(-\infty) + f'(c)(x - c) \rightarrow +\infty$.

故存在 $d < c$, 使得

$$f(d) > f(c) + f'(c)(d - c) > 0 \quad \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

在 $[x_0, b]$ 和 $[d, x_0]$ 利用零点定理, $\exists x_1 \in (x_0, b)$, $x_2 \in (d, x_0)$ 使得

$$f(x_1) = f(x_2) = 0 \quad \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

下面证明方程 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 只有两个实根.

用反证法. 假设方程 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有三个实根, 不妨设为 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 < x_2 < x_3$. 对 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 和 $[x_2, x_3]$ 上分别应用洛尔定理, 则各至少存在一点 ξ_1 ($x_1 < \xi_1 < x_2$) 和 ξ_2 ($x_2 < \xi_2 < x_3$), 使得 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$. 再将 $f'(x)$ 在区间 $[\xi_1, \xi_2]$ 上使用洛尔定理, 则至少存在一点 η ($\xi_1 < \eta < \xi_2$), 使 $f''(\eta) = 0$. 此与条件 $f''(x) > 0$ 矛盾. 从而方程 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 不能多于两个根. \dots\dots\dots (15 分)

证 2. 先证方程 $f(x) = 0$ 至少有两个实根.

由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \alpha > 0$, 必有一个充分大的 $a > x_0$, 使得 $f'(a) > 0$.

因 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有二阶导数, 故 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 均连续. 由拉格朗日中值定理, 对于 $x > a$ 有

$$\begin{aligned} f(x) - [f(a) + f'(a)(x - a)] &= f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) \\ &= f'(\xi)(x - a) - f'(a)(x - a) = [f'(\xi) - f'(a)](x - a) \\ &= f''(\eta)(\xi - a)(x - a). \end{aligned}$$

其中 $a < \xi < x$, $a < \eta < x$. 注意到 $f''(\eta) > 0$ (因为 $f''(x) > 0$), 则

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x-a) \quad (x > a)$$

又因 $f'(a) > 0$, 故存在 $b > a$, 使得

$$f(b) > f(a) + f'(a)(b-a) > 0 \quad \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

又已知 $f(x_0) < 0$, 由连续函数的中间值定理, 至少存在一点 $x_1 (x_0 < x_1 < b)$ 使得

$$f(x_1) = 0. \text{ 即方程 } f(x) = 0 \text{ 在 } (x_0, +\infty) \text{ 上至少有一个根 } x_1 \quad \dots\dots\dots (7 \text{ 分})$$

同理可证方程 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, x_0)$ 上至少有一个根 x_2 . $\dots\dots\dots (12 \text{ 分})$

下面证明方程 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 只有两个实根. (以下同证 1) $\dots\dots (15 \text{ 分})$

三 (本题共 15 分)、设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2t + t^2 \\ y = \psi(t) \end{cases} (t > -1)$ 所确定. 且

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3}{4(1+t)}, \text{ 其中 } \psi(t) \text{ 具有二阶导数, 曲线 } y = \psi(t) \text{ 与 } y = \int_1^{t^2} e^{-u^2} du + \frac{3}{2e} \text{ 在 } t = 1$$

处相切. 求函数 $\psi(t)$.

解 因为 $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{2+2t}, \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2+2t} \cdot \frac{(2+2t)\psi''(t) - 2\psi'(t)}{(2+2t)^2} = \frac{(1+t)\psi''(t) - \psi'(t)}{4(1+t)^3},$
 $\dots\dots\dots (3 \text{ 分})$

由题设 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3}{4(1+t)},$ 故 $\frac{(1+t)\psi''(t) - \psi'(t)}{4(1+t)^3} = \frac{3}{4(1+t)},$ 从而

$$(1+t)\psi''(t) - \psi'(t) = 3(1+t)^2, \text{ 即 } \psi''(t) - \frac{1}{1+t}\psi'(t) = 3(1+t).$$

设 $u = \psi'(t),$ 则有 $u' - \frac{1}{1+t}u = 3(1+t),$

$$u = e^{\int \frac{1}{1+t} dt} \left[\int 3(1+t)e^{-\int \frac{1}{1+t} dt} dt + C_1 \right] = (1+t) \left[\int 3(1+t)(1+t)^{-1} dt + C_1 \right] = (1+t)(3t + C_1).$$
 $\dots\dots\dots (9 \text{ 分})$

由曲线 $y = \psi(t)$ 与 $y = \int_1^{t^2} e^{-u^2} du + \frac{3}{2e}$ 在 $t = 1$ 处相切知 $\psi(1) = \frac{3}{2e},$

$$\psi'(1) = \frac{2}{e}. \quad \dots\dots\dots (11 \text{ 分})$$

所以 $u|_{t=1} = \psi'(1) = \frac{2}{e}$, 知 $C_1 = \frac{1}{e} - 3$.

$\psi(t) = \int (1+t)(3t+C_1)dt = \int (3t^2 + (3+C_1)t + C_1)dt = t^3 + \frac{3+C_1}{2}t^2 + C_1t + C_2$, 由

$\psi(1) = \frac{3}{2e}$, 知 $C_2 = 2$, 于是 $\psi(t) = t^3 + \frac{1}{2e}t^2 + (\frac{1}{e}-3)t + 2$ ($t > -1$). ... (15分)

四 (本题共 15 分)、设 $a_n > 0, S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, 证明:

(1) 当 $\alpha > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 收敛;

(2) 当 $\alpha \leq 1$, 且 $S_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) 时, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 发散.

证明 令 $f(x) = x^{1-\alpha}, x \in [S_{n-1}, S_n]$. 将 $f(x)$ 在区间 $[S_{n-1}, S_n]$ 上用拉格朗日中值定理,

存在 $\xi \in (S_{n-1}, S_n)$

$$f(S_n) - f(S_{n-1}) = f'(\xi)(S_n - S_{n-1})$$

$$\text{即 } S_n^{1-\alpha} - S_{n-1}^{1-\alpha} = (1-\alpha)\xi^{-\alpha} a_n \quad \dots\dots\dots(5 \text{ 分})$$

(1) 当 $\alpha > 1$ 时, $\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_n^{\alpha-1}} = (\alpha-1)\frac{a_n}{\xi^\alpha} \geq (\alpha-1)\frac{a_n}{S_n^\alpha}$. 显然 $\left\{ \frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_n^{\alpha-1}} \right\}$ 的

前 n 项和有界, 从而收敛, 所以级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 收敛. $\dots\dots\dots(8 \text{ 分})$

(2) 当 $\alpha = 1$ 时, 因为 $a_n > 0, S_n$ 单调递增, 所以

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k} \geq \frac{1}{S_{n+p}} \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k = \frac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}} = 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}}$$

因为 $S_n \rightarrow +\infty$ 对任意 n , 当 $p \in \mathbb{N}$ $\frac{S_n}{S_{n+p}} < \frac{1}{2}$, 从而 $\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k} \geq \frac{1}{2}$. 所以级数

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 发散. $\dots\dots\dots(12 \text{ 分})$

当 $\alpha < 1$ 时, $\frac{a_n}{S_n^\alpha} \geq \frac{a_n}{S_n}$. 由 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 发散及比较判别法, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 发散. (15分)

五 (本题共 15 分)、设 l 是过原点, 方向为 (α, β, γ) (其中 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$) 的直线, 均匀椭球 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ (其中 $0 < c < b < a$, 密度为 1) 绕 l 旋转.

(1) 求其转动惯量; (2) 求其转动惯量关于方向 (α, β, γ) 的最大值和最小值.

解 (1) 设旋转轴 l 的方向向量为 $\mathbf{l} = (\alpha, \beta, \gamma)$, 椭球内任意一点 $P(x, y, z)$ 的径向量

$$d^2 = \mathbf{r}^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{l})^2 = (1 - \alpha^2)x^2 + (1 - \beta^2)y^2 + (1 - \gamma^2)z^2 - 2\alpha\beta xy - 2\beta\gamma yz - 2\alpha\gamma xz$$

由积分区域的对称性可知

$$\iiint_{\Omega} (2\alpha\beta xy + 2\beta\gamma yz + 2\alpha\gamma xz) dx dy dz = 0, \text{ 其中 } \Omega = \left\{ (x, y, z) \left| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right. \right\}$$

..... (2 分)

$$\text{而 } \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \int_{-a}^a x^2 dx \iint_{\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 - \frac{x^2}{a^2}} dy dz = \int_{-a}^a x^2 \cdot \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4a^3 bc \pi}{15}$$

$$\text{(或 } \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 a^2 r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta \cdot abc r^2 \sin \varphi dr = \frac{4a^3 bc \pi}{15} \text{)}$$

$$\iiint_{\Omega} y^2 dx dy dz = \frac{4ab^3 c \pi}{15}, \quad \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz = \frac{4abc^3 \pi}{15} \quad \text{..... (5 分)}$$

由转动惯量的定义

$$J_l = \iiint_{\Omega} d^2 dx dy dz = \frac{4abc \pi}{15} \left((1 - \alpha^2)a^2 + (1 - \beta^2)b^2 + (1 - \gamma^2)c^2 \right) \text{..... (6 分)}$$

(2) 考虑目标函数 $V(\alpha, \beta, \gamma) = (1 - \alpha^2)a^2 + (1 - \beta^2)b^2 + (1 - \gamma^2)c^2$ 在约束

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ 下的条件极值.

设拉格朗日函数为

$$L(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) = (1 - \alpha^2)a^2 + (1 - \beta^2)b^2 + (1 - \gamma^2)c^2 + \lambda(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1)$$

..... (8 分)

$$\text{令 } L_{\alpha} = 2\alpha(\lambda - a^2) = 0, \quad L_{\beta} = 2\beta(\lambda - b^2) = 0, \quad L_{\gamma} = 2\gamma(\lambda - c^2) = 0,$$

$$L_{\lambda} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1 = 0$$

解得极值点为 $Q_1(\pm 1, 0, 0, a^2)$, $Q_2(0, \pm 1, 0, b^2)$, $Q_3(0, 0, \pm 1, c^2)$ (12分)

比较可知, 绕 z 轴 (短轴) 的转动惯量最大, 为 $J_{\max} = \frac{4abc\pi}{15}(a^2 + b^2)$; 绕

x 轴 (长轴) 的转动惯量最小, 为 $J_{\min} = \frac{4abc\pi}{15}(b^2 + c^2)$ (15分)

六 (本题共 15 分)、设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的导数, 在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线 C 上, 曲线积分 $\oint_C \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2}$ 的值为常数.

(1) 设 L 为正向闭曲线 $(x-2)^2 + y^2 = 1$. 证明: $\oint_L \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2} = 0$;

(2) 求函数 $\varphi(x)$;

(3) 设 C 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线, 求 $\oint_C \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2}$.

解 (1) 设 $\oint_L \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2} = I$, 闭曲线 L 由 $L_i, i=1, 2$ 组成. 设 L_0 为不经过原点

的光滑曲线, 使得 $L_0 \cup L_1$ (其中 L_1 为 L_1 的反向曲线) 和 $L_0 \cup L_2$ 分别组成围绕原点的分段光滑闭曲线 $C_i, i=1, 2$. 由曲线积分的性质和题设条件

$$\begin{aligned} \oint_L \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2} &= \int_{L_1} + \int_{L_2} \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2} = \int_{L_2} + \int_{L_0} - \int_{L_0} - \int_{L_1^-} \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2} \\ &= \oint_{C_1} + \oint_{C_2} \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2} = I - I = 0 \end{aligned} \quad \text{.....(5分)}$$

(2) 设 $P(x, y) = \frac{2xy}{x^4 + y^2}, Q(x, y) = \frac{\varphi(x)}{x^4 + y^2}$.

$$\text{令 } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \text{即} \quad \frac{\varphi'(x)(x^4 + y^2) - 4x^3\varphi(x)}{(x^4 + y^2)^2} = \frac{2x^5 - 2xy^2}{(x^4 + y^2)^2}, \quad \text{解得}$$

$$\varphi(x) = -x^2 \quad \text{..... (10分)}$$

(3) 设 D 为正向闭曲线 $C_a: x^4 + y^2 = 1$ 所围区域, 由(1)

$$\oint_C \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2} = \oint_{C_a} \frac{2xydx - x^2dy}{x^4 + y^2} \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

利用 Green 公式和对称性,

$$\oint_{C_a} \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2} = \oint_{C_a} 2xydx - x^2dy = \iint_D (-4x)dxdy = 0 \dots\dots\dots (15 \text{ 分})$$