

首届全国大学生数学竞赛决赛试卷

(非数学类, 2010)

一、计算下列各题(要求写出重要步骤).

(1) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right) \sin \frac{k\pi}{n^2}$.

(2) 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{axdydz + (z+a)^2 dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, 其中 Σ 为下半球面 $z = -\sqrt{a^2 - y^2 - x^2}$ 的上侧, $a > 0$.

(3) 现要设计一个容积为 V 的一个圆柱体的容器. 已知上下两底的材料费为单位面积 a 元, 而侧面的材料费为单位面积 b 元. 试给出最节省的设计方案: 即高与上下底的直径之比为何值时所需费用最少?

(4) 已知 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ 内满足 $f'(x) = \frac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x}$, 求 $f(x)$.

二、求下列极限

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right)$;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{3} \right)^n$, 其中 $a > 0, b > 0, c > 0$

三、设 $f(x)$ 在 $x=1$ 点附近有定义, 且在 $x=1$ 点可导, $f(1)=0, f'(1)=2$. 求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x)}{x^2 + x \tan x}.$$

四、设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 无穷积分 $\int_0^{\infty} f(x) dx$ 收敛.

求 $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} \int_0^y x f(x) dx$

五、设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可微, 且 $f(0) = f(1) = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. 证明: (1)

存在 $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 使得 $f(\xi) = \xi$; (2) 存在 $\eta \in (0, \xi)$ 使得 $f'(\eta) = f(\eta) - \eta + 1$.

六、设 $n > 1$ 为整数,

$$F(x) = \int_0^x e^{-t} \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} \right) dt.$$

证明: 方程 $F(x) = \frac{n}{2}$ 在 $\left(\frac{n}{2}, n\right)$ 内至少有一个根.

七、是否存在 \mathbb{R}^1 中的可微函数 $f(x)$ 使得

$$f(f(x)) = 1 + x^2 + x^4 - x^3 - x^5?$$

若存在, 请给出一个例子; 若不存在, 请给出证明.

八、设 $f(x)$ 在 $[0, \infty)$ 上一致连续, 且对于固定的 $x \in [0, \infty)$, 当自然数 $n \rightarrow \infty$ 时

$f(x+n) \rightarrow 0$. 证明: 函数序列 $\{f(x+n): n=1, 2, \dots\}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛于 0.