首届中国大学生数学竞赛赛区赛试卷解答

（非数学类，2009）

考试形式： 闭卷　　考试时间： 120 分钟　　满分： 100 分.

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
满 分	20	5	15	15	10	10	15	10	100
得 分									

注意：1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边，写在其它纸上一律无效.

2、密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记.

得 分	
评阅人	

一、 填空题（每小题 5 分，共 20 分）.

（1）计算 $\iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}dxdy=$____________，其中区域 D 由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围三角形区域.

（2）设 $f(x)$ 是连续函数，满足 $f(x)=3x^2-\int_0^2 f(x)dx-2$，则 $f(x)=$____________.

（3） 曲面 $z=\frac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程是____________.

（4）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y\ln 29$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f'\neq 1$，则 $\frac{d^2y}{dx^2}=$____________.

答案：$\frac{16}{15}$，$3x^2-\frac{10}{3}$，$2x+2y-z-5=0$，$-\frac{[1-f'(y)]^2-f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3}$.

专业：______ 年级：______ 所在院校：______ 身份证号：______ 姓名：______

密 —— 封 —— 线

得　分	
评阅人	

二、（5 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n})^{\frac{e}{x}}$ ，其中 n 是给定的正整数.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\exp\{\dfrac{e}{x}\ln(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n})\}$

$$=\exp\{\lim_{x\to 0}\frac{e(\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n)}{x}\}$$ ……………………..….（2 分）

其中大括号内的极限是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，由 $L'Hospital$ 法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e(\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e(e^x+2e^x+\cdots+ne^{nx})}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}$$

$$=\frac{e(1+2+\cdots+n)}{n}=(\frac{n+1}{2})e$$

于是　原式= $e^{(\frac{n+1}{2})e}$.　　　　……………………………………..…………..….(5 分)

得　分	
评阅人	

三、（15 分）设函数 $f(x)$ 连续，$g(x)=\int_0^1 f(xt)dt$ ，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$ ，A 为常数，求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解：由题设，知 $f(0)=0$， $g(0)=0$.　　　　…………………….………...…(2 分)

令 $u=xt$，得 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(u)du}{x}$　$(x\neq 0)$，………………………………………..……（5 分）

从而　$g'(x)=\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}$　$(x\neq 0)$ ………………………………………..……(8 分)

由导数定义有

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}$$ ……………………………………….……(11 分)

由于 $\lim\limits_{x\to 0}g'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=A-\dfrac{A}{2}=\dfrac{A}{2}=g'(0)$，

从而知 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.　……………………………………………….……….(15 分)

专业：______ 年级：______ 所在院校：______ 身份证号：______ 姓名：______

密 封 线

得 分	
评阅人	

四、（15 分）已知平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le\pi\ ,0\le y\le\pi\}$ ，L 为 D 的正向边界，试证：

（1）$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$ ；

（2）$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx\ge\dfrac{5}{2}\pi^2$.

证法一：由于区域 D 为一正方形，可以直接用对坐标曲线积分的计算法计算.

(1) 左边 $=\int_0^\pi \pi e^{\sin y}dy-\int_\pi^0 \pi e^{-\sin x}dx=\pi\int_0^\pi (e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx$ ， ......(4 分)

右边 $=\int_0^\pi \pi e^{-\sin y}dy-\int_\pi^0 \pi e^{\sin x}dx=\pi\int_0^\pi (e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx$ ， ....（8 分）

所以 $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$ . ...(10 分)

(2) 由于 $e^{\sin x}+e^{-\sin x}\ge 2+\sin^2 x$ ， ....(12 分)

$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\pi\int_0^\pi (e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx\ge\dfrac{5}{2}\pi^2$ . ...(15 分)

证法二：（1）根据 $Green$ 公式，将曲线积分化为区域 D 上的二重积分

$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\iint_D (e^{\sin y}+e^{-\sin x})d\delta$ .... (4 分)

$\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx=\iint_D (e^{-\sin y}+e^{\sin x})d\delta$ ....(8 分)

因为 关于 $y=x$ 对称，所以 $\iint_D (e^{\sin y}+e^{-\sin x})d\delta=\iint_D (e^{-\sin y}+e^{\sin x})d\delta$ ，故

$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$ . ... (10 分)

(2) 由 $e^t+e^{-t}=2\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^{2n}}{(2n)!}\ge 2+t^2$

$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\iint_D (e^{\sin y}+e^{-\sin x})d\delta=\iint_D (e^{\sin x}+e^{-\sin x})d\delta\ge\dfrac{5}{2}\pi^2$.

......................(15 分)

得　分	
评阅人	

五、（10 分）已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}$，$y_2 = xe^x + e^{-x}$，$y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程.

解：根据二阶线性非齐次微分方程解的结构的有关知识，由题设可知：e^{2x} 与 e^{-x} 是相应齐次方程两个线性无关的解，且 xe^x 是非齐次的一个特解.因此可以用下述两种解法 …………………………………………………………………(6 分)

解法一：故此方程式 $y'' - y' - 2y = f(x)$ ……………………………………(8 分)

将 $y = xe^x$ 代入上式，得

$f(x) = (xe^x)'' - (xe^x)' - 2xe^x = 2e^x + xe^x - e^x - xe^x - 2xe^x = e^x - 2xe^x$，

因此所求方程为 $y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x$． ……………………………………… …(10 分)

解法二：故 $y = xe^x + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$，是所求方程的通解，……………………(8 分)

由 $y' = e^x + xe^x + 2c_1 e^{2x} - c_2 e^{-x}$，$y'' = 2e^x + xe^x + 4c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$，消去 c_1, c_2 得所求方程为 $y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x$. ……………………………………………………(10 分)

得　分	
评阅人	

六、（10 分）设抛物线 $y = ax^2 + bx + 2\ln c$ 过原点，当 $0 \le x \le 1$ 时，$y \ge 0$，又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x = 1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$. 试确定 a, b, c，使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

解：因抛物线过原点，故 $c = 1$

由题设有 $\int_0^1 (ax^2 + bx)dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{1}{3}$.即 $b = \frac{2}{3}(1-a)$，…………………………(2 分)

而 $V = \pi\int_0^1 (ax^2 + bx)^2 dx = \pi[\frac{1}{5}a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{3}b^2]$

$= \pi[\frac{1}{5}a^2 + \frac{1}{3}a(1-a) + \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}(1-a)^2]$. ……………………………………(5 分)

令 $\frac{dv}{da} = \pi[\frac{2}{5}a + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}a - \frac{8}{27}(1-a)] = 0$，

得 $a = -\frac{5}{4}$，代入 b 的表达式 得 $b = \frac{3}{2}$. 所以 $y \ge 0$，……………………(8 分)

专业：________ 年级：________ 所在院校：________ 身份证号：________ 姓名：________

密 封 线

又因 $\dfrac{d^2v}{da^2}\Big|_{a=-\frac{5}{4}}=\pi[\dfrac{2}{5}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{8}{27}]=\dfrac{4}{135}\pi>0$ 及实际情况，当 $a=-\dfrac{5}{4}$，$b=\dfrac{3}{2}$，$c=1$ 时，体积最小. ……………..………..….(10 分)

得　分	
评阅人	

七、（15 分）已知 $u_n(x)$ 满足

$$u_n{}'(x)=u_n(x)+x^{n-1}e^x$$（n 为正整数），

且 $u_n(1)=\dfrac{e}{n}$，求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 之和.

解：先解一阶常系数微分方程，求出 $u_n(x)$ 的表达式，然后再求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和.

由已知条件可知 $u_n{}'(x)-u_n(x)=x^{n-1}e^x$ 是关于 $u_n(x)$ 的一个一阶常系数线性微分方程，故其通解为

$$u_n(x)=e^{\int dx}(\int x^{n-1}e^xe^{-\int dx}dx+c)=e^x(\frac{x^n}{n}+c)$$ ， ………………...…..(6 分)

由条件 $u_n(1)=\dfrac{e}{n}$，得 $c=0$，故 $u_n(x)=\dfrac{x^ne^x}{n}$，

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^ne^x}{n}=e^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$. ……………………..……....(8 分)

$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$，其收敛域为 $[-1,\ 1)$，当 $x\in(-1,\ 1)$ 时，有

$s'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\dfrac{1}{1-x}$ ，…………………………..………………………(10 分)

故 $s(x)=\int_0^x\dfrac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x)$. ………………...………………(12 分)

当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=-e^{-1}\ln 2$. ……………………………....(13 分)

于是，当 $-1\le x<1$ 时，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=-e^x\ln(1-x)$. ……………...(15 分)

得　分	
评阅人	

八、（10 分）求 $x \to 1-$ 时，与 $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ 等价的无穷大量.

解：$\int_0^{+\infty} x^{t^2}dt \le \sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \le 1+\int_0^{+\infty} x^{t^2}dt$，……………………………………………(3 分)

$\int_0^{+\infty} x^{t^2}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2\ln\frac{1}{x}}dt$ ……………………………………(7 分)

$= \dfrac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{\ln\frac{1}{x}}} \sim \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{1-x}}$. ……………………………...(10 分)